This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

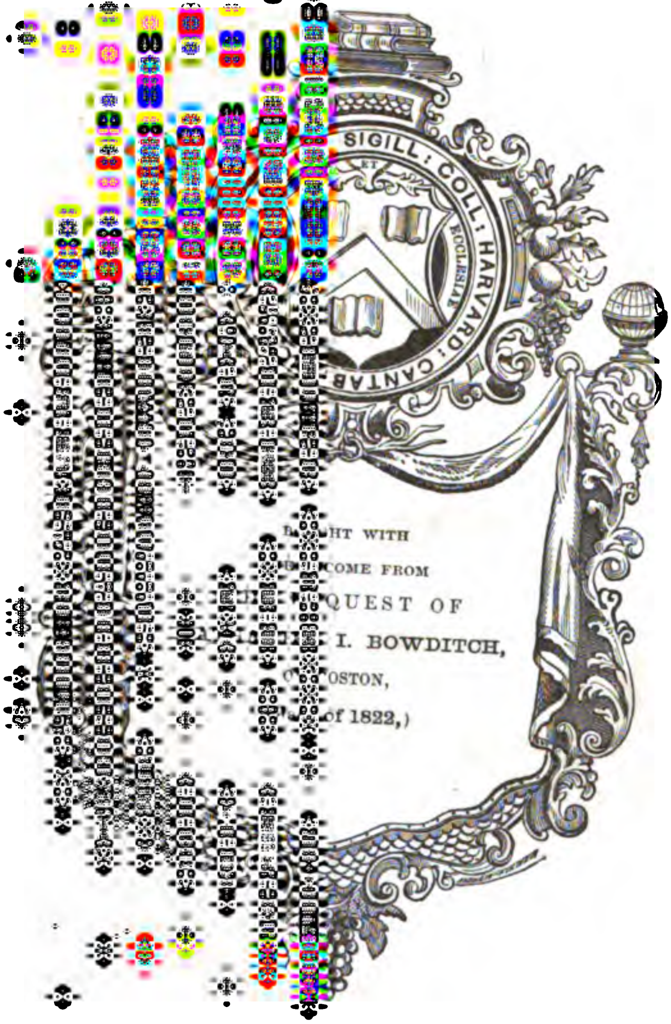
Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

CENTER LIBRARY



B SEEBER
SUCC
ER & SEEBE

PROF. LUIGI BIANCHI

DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA ANALITICA

Anno 1903-1904

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1904

Math 8504.04.3

HARVARD COLLEGE
OCT 24 1904
LIBRARY.

Bowditch fund.

INDICE

PARTE PRIMA

Capitolo I.

Coordinate nelle forme geometriche fondamentali di prima specie.

Introduzione . . . . pag. 3
§. 1. — Ascisse dei punti sopra una retta . . . . » 9
2. — Rapporto secondo cui un punto divide un segmento. — Punto all' infinito . . . . » 16
3. — Birapporto (rapporto anarmonico) di quattro punti allineati . . » 20
4. — Relazioni fra i 6 valori del birapporto . . . . » 25
5. — Caso armonico . . . . » 27
6. — Fascio di rette. — Coordinata di un raggio . . . . . . » 30
7. — Birapporto di quattro raggi di un fascio . . . . . . » 35
8. — Fascio di piani . . . . » 41

Capitolo II.

Coordinate nel piano punteggiato.

§. 9. — Coordinate Cartesiane nel piano . . . . pag. 44
10. — Punteggiate nel piano . . . . » 48
11. — Traslazione degli assi . . . . » 50
12. — Distanza di due punti nel piano . . . . » 53
13. — Teoremi sulle projezioni . . . . » 55
14. — Cangiamento di direzione degli assi . . . . » 60
15. — Casi particolari notevoli . . . . » 65
16. — Formole generali di trasformazione . . . . » 69
17. — Coordinate polari . . . . » 71
18. — Relazioni fra le coordinate polari e le cartesiane . . . . . » 75
19. — Cenno di sistemi più generali di coordinate . . . . . . » 77

Capitolo III.

Equazioni delle curve. — Equazione della retta.

§. 20. — Esempi di equazioni di luoghi geometrici (Retta, circolo, ellisse) . pag. 82
21. — Concetto generale di equazione di una curva . . . . . » 88

§. 22. — Altro modo di definire analiticamente una curva . . . . pag. 93
23. — Esempî di curve: Sinusoide, cicloidi . . . . » 95
24. — Classificazione delle curve in algebriche e trascendenti . . » 99
25. — Equazione della retta. — Coefficiente angolare . . . . . » 103
26. — Punto d' incontro di due rette . . . . » 108
27. — Equazione della retta per due punti. — Forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ . . . » 113
28. — Area del triangolo . . . . » 116
29. — Forma normale dell'equazione della retta. — Equazione polare . » 120
30. — Riduzione dell'equazione della retta a forma normale . . . . » 123
31. — Distanza di un punto da una retta . . . . » 125
32. — Angolo di due rette . . . . » 128
33. — Fascio di rette . . . . » 132

Capitolo IV.

Coordinate nello spazio punteggiato.

§. 34. — Coordinate Cartesiane nello spazio . . . . pag. 137
35. — Assi coordinati ortogonali. — Coseni di direzione . . . . . » 141
36. — Angolo di due direzioni . . . . » 148
37. — Coseni della direzione normale a due date . . . . . . » 151
38. — Determinante dei nove coseni . . . . » 155
39. — Formole di triedrometria o trigonometria sferica . . . . . » 159
40. — Trasformazione delle coordinate . . . . » 163
41. — Distanza di due punti dello spazio . . . . » 169
42. — Rotazione degli assi coordinati ortogonali . . . . . . » 171
43. — Angoli θ, φ, ψ d' Eulero . . . . » 176
44. — Coordinate polari nello spazio . . . . » 179
45. — Cenno di altri sistemi di coordinate . . . . » 182

Capitolo V.

Equazioni delle superficie e delle curve. — Equazioni lineari come rappresentanti piani.

§. 46. — Superficie cilindriche . . . . pag. 185
47. — Equazione di una superficie in generale . . . . » 189
48. — Superficie di rotazione . . . . » 192
49. — Sfera e cono di rotazione . . . . » 195
50. — Equazioni delle curve nello spazio . . . . » 197
51. — Equazioni parametriche di una curva . . . . » 200
52. — Superficie algebriche e trascendenti . . . . » 204
53. — Equazione lineare come rappresentante un piano . . . . . » 206
54. — Parallelismo di due piani . . . . » 210
55. — Punto d' incontro della congiungente due punti con un piano . » 213
56. — Equazione del piano per tre punti . . . . » 215

§. 57. — Volume del tetraedro . . . . pag. 219
58. — Forma normale dell'equazione del piano . . . . . . » 222
59. — Distanza di un punto da un piano. — Angolo di due piani. . » 225
60. — Fascio di piani . . . . » 229
61. — Stella di piani . . . . » 232

Capitolo VI.

Equazioni della retta nello spazio e problemi relativi.

§. 62. — Equazioni generali della retta. — Equazioni ridotte . . . pag. 236
63. — Coseni di direzione di una retta e angolo di due rette . . . » 240
64. — Equazioni normali della retta . . . . » 244
65. — Problemi varii . . . . » 248
66. — Distanza di un punto da una retta . . . . » 252
67. — Minima distanza fra due rette sghembe . . . . . . » 256
68. — Significato del segno della minima distanza . . . . . . » 260

Capitolo VII.

Coordinate projettive omogenee nelle forme di 1ª specie.

§. 69. — Cenni generali . . . . pag. 265
70. — Coordinata projettiva in una forma di 1ª specie . . . . . » 268
71. — Espressione del birapporto di quattro elementi . . . . . » 271
72. — Projettività e trasformazione di coordinate . . . . . . » 274
73. — Elementi immaginarii nelle forme di 1ª specie . . . . . » 280
74. — Forme projettive sovrapposte. — Involuzione . . . . . » 285
75. — Involuzione ortogonale di raggi e definizione projettiva dell'angolo . » 289
76. — Coordinate projettive omogenee in una forma di 1ª specie . . » 292

Capitolo VIII.

Coordinate projettive omogenee nelle forme di 2ª e 3ª specie.

§. 77. — Coordinate projettive omogenee nel piano punteggiato . . . pag. 295
78. — Le coordinate cartesiane omogenee . . . . » 299
79. — Equazione della retta . . . . » 301
80 — Punteggiate nel piano . . . . » 304
81. — Coordinate projettive nel piano rigato. — Equazione del punto . » 306
82. — Piano punteggiato e rigato . . . . » 309
83. — Trasformazione delle coordinate projettive . . . . . . » 313
84. — Equazioni delle curve punteggiate . . . . » 319
85. — Equazioni degli inviluppi di rette. — Principio di dualità . . » 323
86. — Projettività nelle forme di 2ª specie . . . . » 326
87. — Piani projettivi sovrapposti. — Elementi uniti . . . . . » 329

§. 88. — Movimenti di un piano in sè stesso. — Punti ciclici . . . pag. 332
89. — Coordinate projettive nello spazio punteggiato . . . . . » 336
90. — Equazione del piano. — Punteggiate nello spazio . . . . . » 341
91. — Coordinate nello spazio di piani . . . . » 344
92. — Trasformazione delle coordinate. — Equazioni delle superficie . » 347

PARTE SECONDA

Le curve di secondo grado.

Capitolo IX.

Proprietà generali projettive delle curve di secondo grado. — Teoria della polarità.

§. 93. — Forme quadratiche in n variabili . . . . pag. 351
94. — Il discriminante come invariante . . . . » 354
95. Forme quadratiche riducibili . . . . » 360
96. — Coniche degeneri . . . . » 365
97. — Conica per cinque punti . . . . » 369
98. — Generazione delle coniche per fasci projettivi . . . . . » 373
99. — Punto d'incontro d'una retta con una conica . . . . . » 376
100. — Tangente e sua equazione . . . . » 379
101. — La tangente come posizione limite di una corda . . . . . » 381
102. — Punti coniugati rispetto ad una conica. — Retta polare di un punto » 385
103. — Teoria della polarità rispetto ad una conica . . . . . » 388
104. — Rette coniugate. — Equazione tangenziale . . . . . . » 391
105. — Forme particolari dell'equazione della conica . . . . . » 394
106. - Le coniche come curve razionali. — Le collineazioni di una conica in sè . . . . » 397
107. — Punti comuni a due coniche . . . . » 400

Capitolo X.

Proprietà diametrali delle coniche. — Riduzione della loro equazione a forma normale.

§. 108. — Classificazione delle coniche in tre specie . . . . . . pag. 404
109. — Le tre specie di sezioni nel cono circolare retto . . . . . » 408
110. — Equazione fondamentale in coordinate cartesiane . . . . » 411
111. — Punti interni ed esterni ad una conica . . . . » 413
112. — Diametri nelle coniche . . . . » 417
113. — Centro delle coniche . . . . » 419
114. — Diametri coniugati. — Assintoti ed assi . . . . . . » 422
115. — Forme particolari delle equazioni delle coniche. — Equazioni normali . . . . » 425
116. — Trasporto dell'origine nel centro . . . . » 428

§. 117. — Rotazione degli assi coordinati . . . . pag. 432
118. — Calcolo dei coefficiènti a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} dell'equazione ridotta . . » 435
119. — Caso di assi primitivi obliqui . . . . » 438
120. — Classificazione delle coniche a centro . . . . . . » 440
121. — Riduzione dell'equazione della parabola a forma normale . . » 444
122. — Caso $\Delta = 0$, $A_{33} = 0$. — Tabella riassuntiva per le tre specie . » 448

Capitolo XI.

Forma e prime proprietà metriche delle tre specie di coniche.

§. 123. — Forma dell'ellisse . . . . pag. 452
124. — Forma dell'iperbola . . . . » 457
125. — Diametri coniugati nell'ellisse e nell'iperbola . . . . . . » 463
126. — Teoremi d'Apollonio . . . . » 468
127. — Minimo angolo di due diametri coniugati nell'ellisse . . . » 471
128. — Proprietà assintotiche dell'iperbola . . . . » 475
129. — Forma della parabola. — Tangente e normale . . . . » 480

Capitolo XII.

Fuochi e proprietà focali nelle coniche.

§. 130. — Definizione dei fuochi . . . . pag. 484
131. — Determinazione dei fuochi . . . . » 488
132. — Proprietà angolari relative ai fuochi . . . . » 493
133. — Proprietà delle distanze focali. — Direttrici . . . . . . » 497
134. — Altre proprietà focali . . . . » 503
135. — Parabola come forma limite dell'ellisse o dell'iperbola . . . » 507
136. — Equazione polare di una conica riferita ad un fuoco . . . . » 510
137. — Coniche confocali. — Coordinate ellittiche . . . . . . » 513
138. — Coniche simili e similmente disposte . . . . » 518

PARTE TERZA

La superficie di secondo grado (quadriche).

Capitolo XIII.

Proprietà generali projettive delle quadriche. — Teoria della polarità.

§. 139. — Equazione generale di una quadrica. – Quadriche riducibili . pag. 522
140. — Quadrica per nove punti. — Punti d'incontro d'una retta con una quadrica . . . . » 527

§. 141. — Piano tangente in un punto . . . . pag. 530
142. — Punti ellittici, iperbolici e parabolici. — Segno del discriminante » 533
143. — Punti coniugati rispetto ad una quadrica. — Piano polare di un punto » 537
144. — Polarità rispetto ad una quadrica irriducibile . . . . . » 539
145. — Piani coniugati. — Equazione tangenziale di una quadrica . . » 542
146. — Cono circoscritto. — Rette coniugate . . . . » 543
147. — Involuzione delle tangenti coniugate attorno ad un punto . . » 546
148. — Tetraedri autoconiugati. — Forma canonica dell'equazione di una quadrica . . . . » 548

Capitolo XIV.

Piani diametrali nelle quadriche — Centro — Piani diametrali principali.

§. 149. — Equazioni fondamentali in coordinate cartesiane. — Piani diametrali pag. 551
150. — Centro della quadrica . . . . » 554
151. — Le cinque specie di quadriche . . . . » 556
152. — Equazione cubica per la determinazione delle direzioni principali » 561
153. — Corrispondenza fra le radici dell'equazione cubica e le direzioni principali . . . . » 564
154. — Realità delle radici dell'equazione cubica e più in generale dell'equazione secolare . . . . » 568
155. — La terna ortogonale di direzioni principali . . . . . . » 573
156. — Equazioni normali delle quadriche a centro . . . . . » 577
157. — Criterî distintivi per le varie specie di quadriche a centro . . » 582
158. — Equazioni normali dei paraboloidi (quadriche prive di centro) . » 588
159. — Tabella riassuntiva per le varie specie di quadriche non degeneri » 591

Capitolo XV.

Descrizione della forma delle cinque specie di quadriche. — Proprietà delle quadriche a centro.

§. 160. — Quadriche di rotazione . . . . pag. 594
161. — Sfera. — Circolo assoluto e definizione projettiva dell'angolo . » 597
162. — Ellissoide a tre assi ineguali . . . . » 602
163. — Ellissoide generale come derivato da un ellissoide di rotazione . » 608
164. — Sezioni circolari e punti circolari nell'ellissoide . . . . . » 613
165. — Forma dell'iperboloide ad una falda . . . . » 618
166. — Sezioni circolari nell'iperboloide ad una falda e nel cono . . » 623
167. — Forma dell'iperboloide a due falde . . . . » 626
168. — Paraboloide ellittico . . . . » 629
169. — I due paraboloidi come superficie di traslazione . . . » 633
170. — Le sezioni circolari nelle quadriche in relazione coll'assoluto . » 637
171. — Terna di diametri ortogonali nell'ellissoide . . . . . . » 642
172. — Rappresentazione dell'ellissoide sulla sfera . . . . . . » 645
173. — Terna di diametri coniugati nell'ellissoide . . . . . . » 647

Capitolo XVI.

I due sistemi di generatrici sulle quadriche rigate.

§. 174. — I due sistemi di rette sull'iperboloide . . . . . . pag. 650
175. — Proprietà dei due sistemi di generatrici . . . . . . » 654
176. — Modo di distribuzione delle generatrici sull'iperboloide . . » 657
177. — Generazione delle quadriche rigate . . . . » 661
178. — L'iperboloide articolato . . . . » 666
179. — Il doppio sistema di rette sul paraboloide iperbolico . . . . » 672

Capitolo XVII.

Fuochi nelle quadriche e coniche focali.

§. 180. — Triedro principale relativo ad un punto . . . . . . pag. 677
181. — Fuochi e coniche focali nelle quadriche a centro . . . . » 681
182. — Coniche focali nei paraboloidi . . . . » 687
183. — Coni rotondi projettanti una conica . . . . » 689
184. — Coppie di coniche focali . . . . » 693
185. — Assi focali e direttrici . . . . » 696
186. — Distanza di un punto di una quadrica da un fuoco . . . . » 699
187. — Relazione fra le distanze di un punto di una conica da due fuochi fissi » 704
188. — Quadriche a centro confocali . . . . » 707
189. — Il sistema delle quadriche confocali come sistema triplo ortogonale » 710
190. — Linee di curvatura sulle quadriche a centro . . . . . » 714
191. — Coordinate ellittiche . . . . » 722

Capitolo 1°

Coordinate nelle forme fondamentali geometriche di prima specie.

Introduzione

Le prime applicazioni dell'algebra alla geometria si presentarono quasi immediate ai matematici, appena i metodi algebrici ebbero preso un regolare sviluppo. Esse riguardano i *problemi geometrici determinati*, dove si tratta di costruire una figura geometrica assegnati che ne siano alcuni elementi i quali servano a determinare perfettamente la figura, od anche siano tali da lasciare luogo ad un certo numero (finito) di figure soddisfacenti alle condizioni assegnate. Un problema di questa natura è per es. quello della costruzione di un triangolo assegnati che ne siano tre elementi (che non sieno esclusivamente angoli); e qui per elementi del triangolo intendiamo qualunque segmento rettilineo od angolo determinato col triangolo: p. e. i lati del triangolo, le mediane, le bisettrici, le altezze, gli angoli del triangolo ecc.

Qualunque problema geometrico determinato, traducendo algebricamente le relazioni fra gli elementi dati e gli elementi incogniti del problema, conduce sempre a tante equazioni distinte fra le incognite quante sono le incognite stesse. L'algebra insegna poi ad *eliminare* tutte le incognite meno una, che diciamo x, ed a formare quindi un'unica equazione (risultante) per quest'ultima incognita, colla risoluzione della quale viene risoluto il problema. L'equazione finale di cui è parola può, a seconda della natura del problema, avere un grado m comunque elevato e noi la scriviamo

$$(1) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

dove le a sono costanti note pei dati del problema.

Se per fissare le idee, supponiamo che si tratti di un problema planimetrico, diciamo che il problema è risolubile elementarmente quando è possibile costruire la figura domandata *col solo uso della riga e del compasso*. Ciò significa che le sole costruzioni concesse sono il descrivere rette e tracciare circoli. Da considerazioni che saranno svolte più tardi nel corso risulta che, affinchè una tale soluzione elementare del problema sia

possibile, è necessario e sufficiente che l'equazione finale (1) sia un'equazione di 1° o di 2° grado, ovvero sia riducibile ad una successione di equazioni dei due primi gradi.[1] Le teorie algebriche danno dei criteri generali coi quali si può riconoscere se un'equazione data (1) può risolversi per tal modo, cioè colla sola estrazione di radicali quadratici. E così, tradotto il problema geometrico determinato in un'equazione (1), noi abbiamo dei metodi regolari che ci permettono di decidere se il problema è solubile od insolubile elementarmente. Basta già l'avere accennato a queste prime applicazioni dell'algebra alla geometria per intendere il vantaggio che la geometria può trarre dai processi algebrici. Quando di un dato problema geometrico non si riesce a trovare una soluzione (elementare), i soli procedimenti della geometria sintetica non danno il modo di decidere se ciò dipenda da che non sia ancora trovata la via appropriata alla risoluzione, ovvero dalla effettiva insolubilità del problema. Ed in quest'ultimo caso

---

(1) Esempio: l'equazione biquadratica

$$a x^4 + b x^2 + c = 0.$$

tutti i tentativi per la risoluzione debbono riuscire necessariamente vani. Fra i problemi insolubili (elementarmente) citeremo i due celebri problemi dell'antichità: della duplicazione del cubo, e della trisezione dell'angolo. Ed a questi, in un ordine ancor più elevato, aggiungiamo l'altro famoso della quadratura del circolo, la cui insolubilità fu dimostrata soltanto in epoca recente (1882) da Lindemann.

Con queste prime applicazioni dell'algebra alla geometria, delle quali abbiamo dato un breve cenno, si può dire che veniva a farsi, in un certo senso, della geometria analitica. Ma la scienza che oggidì chiamiamo con questo nome, ha ben altra e maggiore importanza di quella che le verrebbe dal solo studio dei problemi geometrici determinati. Essa insegna a trasformare lo studio di tutte le proprietà geometriche delle figure in corrispondenti ricerche algebriche.

I concetti fondamentali ed i procedimenti della geometria analitica scaturiscono dal così detto metodo delle coordinate e per opera specialmente di Cartesio nel secolo 17°, si elevarono al grado di scienza. Scopo del presente corso è appunto d'insegnare

questi metodi fondamentali e le loro prime applicazioni.

La creazione della geometria analitica segue un'epoca veramente importante nella storia delle matematiche. Da allora in poi due scienze, l'algebra e la geometria che apparivano disgiunte, vennero collegate strettamente in guisa che i progressi dell'una divennero progressi dell'altra. E nuove teorie geometriche sorsero da teorie algebriche, come inversamente da questioni geometriche nacquero nuovi rami dell'algebra.

I concetti della geometria analitica trovano poi un'applicazione continua nelle parti superiori delle matematiche, in particolare nel calcolo infinitesimale, e nelle applicazioni delle matematiche allo studio dei fenomeni naturali: fisica, meccanica ecc.

Oggetto della geometria (sintetica od analitica) è lo studio delle proprietà delle figure, che sono complessi di punti, di linee, di superficie e di solidi. La geometria degli antichi (sintetica) compie questo studio mediante considerazioni dirette sulla figura, investigando le relazioni fra le diverse parti della figura stessa. La Geometria analitica sostituisce a tali consi-

siderazioni dei processi algebrici, ciò che è reso possibile appunto, come vedremo, dallo strumento delle coordinate. Elemento generatore di ogni figura si può dapprima considerare il punto. Un punto che si muova, con determinata legge, nello spazio genera una linea piana o a doppia curvatura. Una linea che si muova cangiando al tempo stesso, in generale, di forma, genera una superficie. Le linee e le superficie sono enti geometrici che si dicono rispettivamente ad una e a due dimensioni. Essi sono tutti immersi nello spazio indefinito, che è da considerarsi, insieme a qualunque sua porzione (solidi), come un ente geometrico a tre dimensioni (1). Considerando così il punto come elemento generatore di ogni figura, il problema fondamentale della geometria analitica diventa il seguente: <u>fissare con mezzi algebrici la posizione di un punto (elemento) nella figura.</u>

---

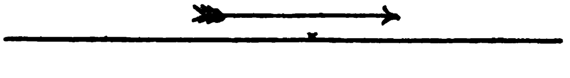
(1) Questo concetto intuitivo del numero delle dimensioni di un ente geometrico acquista, come vedremo, matematica esattezza del numero delle <u>coordinate</u> necessarie ad individuarne un suo elemento (punto)

A questo primo punto di vista ove il punto è riguardato come elemento generatore delle figure, nell'ulteriore sviluppo della geometria sono venuti a sostituirsi dei concetti più generali considerando degli enti geometrici in cui l'elemento generatore può essere qualunque. Ne vedremo fra breve gli esempi per noi più importanti.

§. 1

Ascisse dei punti sopra una retta.

Cominceremo dal risolvere il problema fondamentale enunciato per il più semplice ente ad una dimensione generato da un punto: per la linea retta. La retta riguardata così come luogo dei suoi punti, dicesi una punteggiata. Sulla retta un punto che si muova può procedere in due sensi, in quello indicato nella figura con una freccia, ovvero nel senso opposto.



Diremo uno di questi due (scelto ad arbitrio) il senso o verso positivo della retta, l'opposto il negativo.

Consideriamo sulla retta due punti qualunque A, B. Sarà determinata la loro posizione relativa (cioè la posizione di B nota che sia quel-

la di A) quando si conoscano questi due elementi: 1° la distanza da A a B, cioè la lunghezza del segmento AB, 2° da quale parte giace B rispetto ad A.

Il primo elemento è dato dal numero positivo (razionale od irrazionale) che misura la distanza AB, scelta una determinata unità lineare di misura. Per conoscere il secondo elemento noi dovremmo dire se percorrendo il segmento AB da A in B si proceda nel senso positivo o negativo della retta. Ma l'introduzione, già effettuata nell'algebra, dei numeri negativi insieme ai positivi ci dà il modo con l'assegnazione di un solo numero algebrico (dotato cioè di segno positivo o negativo) di fissare ad un tempo i due elementi in questione. Facciamo perciò la convenzione fondamentale seguente:

Chiamiamo valore algebrico del segmento AB, ed indichiamo con $\overline{AB}$ un numero, il cui valore assoluto misura la distanza fra A e B e il cui segno è positivo o negativo, secondo che per andare da A in B si proceda nel verso positivo o negativo della retta.

Spesso si dirà brevemente il segmento $\overline{AB}$, intendendo di parlare del suo valore al-

gebrico. Occorrendo qualche volta di indicare il valore assoluto del segmento AB, cioè la sua lunghezza, adopereremo il simbolo $|AB|$; si avrà dunque

$$\overline{AB} = \pm |AB|,$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che $\overline{AB}$ è positivo o negativo.

Come immediata conseguenza di queste convenzioni fondamentali, si ha

$$(1) \qquad \overline{AB} + \overline{BA} = 0, \quad \text{o} \quad \overline{BA} = -\overline{AB},$$

in parole: <u>invertendo i due termini di un segmento, esso (il suo valore algebrico) cangia di segno.</u>

Consideriamo ora tre punti qualunque A, B, C della retta; dico aver luogo l'identità

$$(2) \qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

che si può scrivere anche sotto la forma

$$(2^*) \qquad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.$$

Se il punto B giace fra A e C la (2) è evidente perchè $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ hanno allora il medesimo segno, opposto a quello di $\overline{CA}$, ed è

$$|AB| + |BC| = |CA|.$$

Se B non giace fra A, C, giacerà A fra B, C ovvero C fra A e B; in ambedue i casi avremo, per quanto si è visto ora,

$$\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CB} = 0,$$

che non differisce dalla (2) che pei segni tutti cambiati. Dunque la (2) è vera in ogni caso, qualunque sia la posizione relativa dei tre punti A, B, C.

Premesse queste considerazioni fondamentali, fissiamo sulla retta un punto O che si dirà il punto zero o l'origine. La posizione di un punto qualunque M della retta sarà perfettamente fissata quando si conosce il valore algebrico del segmento $\overline{OM}$.

Se poniamo

$$\overline{OM} = x,$$

il numero x (razionale od irrazionale) che col suo valore fissa la posizione di M dicesi l'ascissa o coordinata del punto M. È da osservarsi che ad ogni posizione di M corrisponde un solo valore del numero x; ed inversamente ad ogni valore di x una sola posizione di M. Si dice per ciò che vi è corrispondenza biunivoca fra i valori del numero reale x e le posizioni del punto M sulla retta, cioè dell'elemento mobile sulla punteggiata. Senza alcuna ambiguità si può quindi definire il punto per mezzo del valore della sua ascissa; così il punto $x = -3$ sarà il punto che dista dall'origine O e nel verso negativo di

tre unità lineari ecc. In particolare l'origine O avrà per ascissa $x=0$; per ciò si dice anche il punto zero.

Dalla formula (2) o (2*) discende subito una formola fondamentale nella teoria delle ascisse. Consideriamo sulla retta due punti A_1, A_2 di rispettive ascisse x_1, x_2 e proponiamoci di calcolare, per mezzo di x_1, x_2, il valore algebrico del segmento $\overline{A_1A_2}$ (1). Se nella (2*) per A, B, C poniamo rispettivamente A_1, A_2, O, la (2*) diventa

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1} .$$

Ma per definizione

$$\overline{OA_1} = x_1 , \quad \overline{OA_2} = x_2 ;$$

dunque la formola richiesta è

$$(3) \qquad \overline{A_1A_2} = x_2 - x_1 .$$

Questa formola enunciata in parole, ci dice: <u>Il valore algebrico di un segmento è eguale all'ascissa del secondo estremo diminuita dell'ascissa del primo.</u>

---

(1) È chiaro a priori che ciò deve essere possibile; perchè, fissati x_1, x_2, sono fissati A_1, A_2 sulla retta e per ciò anche è individuato il valor di $\overline{A_1A_2}$.

Dalla formola fondamentale (3) si può trarre la seguente generalizzazione della formola (2) da cui ha avuto origine. Consideriamo sulla retta un numero qualunque $\underline{n}$ di punti che diciamo

$$A_1, A_2, A_3 \cdots A_{n-1}, A_n;$$

avrà luogo l'identità segmentaria

$$(4) \qquad \overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}=0$$

che può anche scriversi sotto la forma equivalente

$$(4^*) \qquad \overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n},$$

e per $n=3$ coincide evidentemente colla (2).

Se diciamo $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ le rispettive ascisse degli $\underline{n}$ punti e calcoliamo la somma del primo membro da la (4), secondo la formola fondamentale (3), abbiamo la somma

$$(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+(x_1-x_n)$$

che è evidentemente nulla figurandovi ciascuna[1] delle $\underline{n}$ ascisse x due volte con segno contrario.

---

(1) L'identità (4) si può anche rendere evidente a priori osservando che un punto mobile che descriva i successivi segmenti ivi indicati parte da A_1 e vi ritorna; deve quindi percorrere tanto spazio in verso negativo quanto in verso positivo.

Il sistema di ascisse attribuite a ciascun punto della retta dipende essenzialmente dal punto O fissato per origine nonchè dal senso positivo della retta. Si può domandare come cangiano le ascisse dei varî punti della retta spostando l'origine da O in O', senza dapprima cangiare il verso positivo della retta. Essendo A un punto qualunque della retta, indichiamo con x la sua antica, con x' la sua nuova ascissa sicchè

$$\overline{OA} = x, \quad \overline{O'A} = x'$$

e poniamo poi $\overline{OO'} = a$, onde sarà la costante a l'antica ascissa della nuova origine. Dall'identità (2*).

$$\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OO'}$$

si ricava

$$x' = x - a$$

ovvero

$$\text{(A)} \qquad x = x' + a,$$

che è la domandata formola di trasformazione dell'ascisse. Se poi venisse cangiato anche il verso positivo della retta si avrebbe:

$$\text{(A*)} \qquad x = -x' + a.$$

§ 2

Rapporto secondo cui un punto divide un segmento - Punto all'infinito

Dato sulla retta un segmento AB ed un terzo punto qualunque C chiamiamo: <u>rapporto secondo cui il punto C divide il segmento AB, il rapporto dei segmenti</u>

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Si osservi subito che questo rapporto sarà, per la nostra definizione, positivo se C divide <u>internamente</u> il segmento AB, negativo se lo divide <u>esternamente</u>. È evidente che fissati i due punti A, B ed il rapporto secondo cui C divide il segmento AB, il punto C sarà anche perfettamente fissato, poichè il segno di questo rapporto ci dirà se la divisione ha luogo internamente od esternamente ed il suo valore assoluto determinerà secondo la geometria elementare il punto C. Soltanto è da osservare che al detto rapporto $\frac{AC}{CB}$ non si può mai attribuire il valore -1, perchè dovrebbe allora C essere esterno al segmento AB e ad eguale distanza dagli estremi, ciò che è assurdo.

La stessa cosa resulterà del resto dalla formola che andiamo a stabilire per risolvere il problema:

Date le ascisse x_1, x_2 di due punti A, B, ed assegnato il rapporto secondo cui il punto incognito C divide il segmento AB trovare l'ascissa x di C.

Scriviamo il rapporto dato sotto la forma $\frac{m}{n}$, dove m, n sono due numeri reali qualunque, positivi o negativi. Siccome qui si tratta solo del loro rapporto, potremo sostituire ad m, n, anche km, kn essendo k un fattore arbitrario di proporzionalità. Intenderemo però escluso il caso di $\frac{m}{n} = -1$, ossia di $m + n = 0$.

Siccome per la formola fondamentale (8) si ha:

$$\overline{AC} = x - x_1, \quad \overline{CB} = x_2 - x,$$

dovendo essere $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{m}{n}$, avremo

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n},$$

ossia per x l'equazione di 1° grado

$$n(x - x_1) = m(x_2 - x),$$

da cui risolvendo, col ricordare che per ipotesi $m + n \neq 0$, otteniamo la formola domandata

$$(I) \qquad x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n}.$$

Se indichiamo il rapporto $\frac{m}{n}$ con una sola lettera λ, la (I) può anche scriversi sotto la forma equivalente:

$$(I^*) \qquad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}.$$

Questa formola ci dimostra che ad ogni valore di $\lambda = \frac{m}{n}$ arbitrariamente dato (escluso il valore $\lambda = -1$) corrisponde un punto C della retta ed inversamente.

Volendo ora esaminare più da vicino il significato del valore escluso $\lambda = -1$ per λ, osserviamo che sebbene a λ non possiamo dare il valore -1 possiamo però dargli dei valori vicini a -1 quanto ci piace, e ad ogni tale valore corrisponderà sempre un punto C della retta. Immaginiamo ora che λ vada accostandosi indefinitamente al valore -1; nel secondo membro della (I^*) il numeratore si accosterà al valore $x_1 - x_2$ diverso da zero mentre il denominatore, diventando sempre più piccolo tenderà a zero. Perciò il valore assoluto della frazione stessa crescerà oltre ogni limite ed x tenderà, per valori positivi o negativi, all'infinito. Il punto C si allontanerà dunque a distanza infinita (dall'uno o dall'altro parte) sulla retta. Inversamente se C si allon-

tana all'infinito il rapporto $\frac{AC}{CB}$ convergerà verso il valore limite -1; poichè dall'identità (2)

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

risulta

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} - 1$$

e quando C s'allontana all'infinito la frazione $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$ nel secondo membro tenderà a zero.

Così: <u>Il valore -1 può considerarsi come il limite cui tende il rapporto λ quando il punto di divisione s'allontana all'infinito.</u>

Si esprime brevemente questo fatto introducendo la nozione del <u>punto all'infinito</u> della retta, che si riguarda come corrispondente al valore $\lambda = -1$ di λ.

Infine osserviamo che se C si fa coincidere con A il valore di λ diventa zero, mentre facendo accostare C al secondo estremo B, λ tende verso ∞; con minore precisione di linguaggio si dice che $\lambda = \infty$ quando C è in B. Dopo ciò vediamo che il numero variabile λ può servire, come l'ordinaria ascissa x, a fissare la posizione di un punto mobile C sulla retta, ad ogni valore di λ corrispondendo una posizione di C ed inversamente; in particolare i valo-

di λ in A, B e nel punto all'infinito saranno rispettivamente $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$.

Notiamo esplicitamente il caso che il punto C di divisione debba cadere nel punto di mezzo del segmento AB; allora è $\lambda = 1$, o $m = n$, e la formola (I) o (I*) dà

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dunque: L'ascissa del punto medio di un segmento è la media aritmetica (la semisomma) delle ascisse degli estremi.

Facciamo infine l'osservazione semplice, ma da ritenersi per il seguito, che dati tre punti A, B, C in linea retta si può parlare del rapporto secondo cui C divide il segmento AB anche senza fissare il senso positivo della retta. Infatti, comunque questo si fissi, il rapporto $\frac{AC}{CB}$ è sempre lo stesso.

S. 3

Doppio rapporto di quattro punti in linea retta.

Presi sulla solita retta quattro punti qualunque, che soltanto supponiamo distinti,

siano A, B, C, D, consideriamoli in un determinato ordine p. e: ABCD e facciamo il quoziente dei due rapporti secondo cui i due ultimi punti C, D dividono il segmento AB fra i primi due. Questo quoziente

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

dicesi il <u>doppio rapporto</u> o <u>birapporto</u> od anche <u>rapporto anarmonico</u> dei quattro punti A, B, C, D nell'ordine considerato e si indica col simbolo

$$(A\,B\,C\,D)$$

onde per definizione

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}},$$

che si può anche scrivere

$$(5) \qquad (A\,B\,C\,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{BC} \times \overline{AD}}.$$

Si osserverà che il birapporto (ABCD) è positivo se le coppie AB, CD non si separano, negativo nel caso contrario (1)

---

(1) Si noti anche che, per quanto si è detto alla fine del § prec^{te}, il birapporto (ABCD) è indipendente dal verso positivo che si fissi sulla retta l.

Da quanto si è visto al § precedente discende subito che, fissati tre punti A, B, C della retta, esiste uno ed un solo quarto punto D che forma con ABC un birapporto dato. Ancora è da notarsi che se il quarto punto D si allontana all'infinito la frazione $\frac{AD}{BD}$ converge verso 1 e quindi il rapporto $(ABCD)$ verso $\frac{AC}{BC}$, ciò che si scrive in modo abbreviato

$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Stabilito ora sulla retta un sistema di ascisse, indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le rispettive ascisse di A, B, C, D. Sostituendo nella (5) ai segmenti che figurano nel secondo membro i loro effettivi valori, espressi per le ascisse, abbiamo

$$(6) \quad (ABCD) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

L'espressione del secondo membro dicesi il birapporto dei quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 nell'ordine scritto e si indica col simbolo

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4),$$

onde per definizione

$$(7) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

Siccome per la (6): <u>il birapporto di quattro</u>

punti (allineati) è uguale al birapporto dei quattro numeri che ne sono le rispettive ascisse, possiamo sostituire alla considerazione del primo birapporto quella del secondo e designando col nome di elementi i punti nel primo caso, le loro ascisse nel secondo potremo intendere di riferirci indifferentemente all'uno o all'altro.

E' bene notare che se si fa tendere x_1 verso infinito il secondo membro della (7) tende verso $\frac{x_1-x_4}{x_2-x_3}$, ciò che si scrive

$$(7') \qquad (\infty, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}$$

Si notino in particolare le formole

$$(7'') \qquad \begin{cases} (\infty, 0, x_3, x_4) = \dfrac{x_4}{x_3} \\ (\infty, 0, 1, x_4) = x_4 \end{cases}$$

Il birapporto $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ di quattro elementi (numeri) dipende essenzialmente dall'ordine secondo cui si considerano e, siccome vi sono 24 permutazioni differenti di quattro elementi, sembra a prima vista che cangiando l'ordine degli elementi debbano aversi 24 valori del birapporto. Ma questi si riducono subito a 6 soltanto, facendo uso del teorema seguente:

Il valore di un birapporto non cangia

<u>se si scambiano fra loro due qualunque degli elementi e contemporaneamente gli altri due</u>

Bisogna dunque dimostrare che si ha

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_2 x_1 x_4 x_3) = (x_3 x_4 x_1 x_2) =$$
$$= (x_4 x_3 x_2 x_1).$$

La verifica è immediata sulla formola effettiva (7); del resto basta verificare le due prime eguaglianze scritte, la terza discendendo dalle prime due.

Dopo ciò è subito visto che se si considera una qualunque delle permutazioni dei quattro elementi, sia $y_1 y_2 y_3 y_4$ (dove dunque le y coincidono in altro ordine colle x), il birapporto $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ sarà uguale a uno di quelli in cui x_1 occupa il primo posto. Se $y_1 = x_1$ ciò è immediato; se poi $y_1 \neq x_1$ si applichi il teorema precedente scambiando y_1 coll'elemento differente x_1 e contemporaneamente gli altri due.(1)

Siccome vi sono 6 permutazioni dei quattro elementi con x_1 al primo posto, non si avranno dunque che 6 valori differenti possibili pel birapporto e cioè

---

(1) P. e.

$$(x_3 x_1 x_2 x_4) = (x_1 x_3 x_4 x_2)$$

$F.3_4$ $\qquad$ 25_4

$$(x_1 x_2 x_3 x_4),\ (x_1 x_2 x_4 x_3),\ (x_1 x_3 x_2 x_4),\ (x_1 x_3 x_4 x_2)$$
$$(x_1 x_4 x_2 x_3),\ (x_1 x_4 x_3 x_2).$$

§ 4.

Relazioni fra i 6 valori del birapporto

Andiamo ora a costatare che i 6 birapporti scritti hanno, in generale, valori diversi e dimostriamo di più che, noto il valore di uno di essi, si può con semplici formole, calcolare quelli degli altri cinque. A questo arriviamo applicando i due teoremi seguenti:

a) Due birapporti che abbiano a comune i due primi elementi e scambiati gli ultimi due hanno un prodotto = 1, cioè sono inversi l'uno dall'altro.

Dimostriamo che si ha

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) \times (x_1 x_2 x_4 x_3) = 1,$$

ovvero

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{1}{(x_1 x_2 x_3 x_4)}\ ;$$

la verifica è immediata sulla formola (7).

b) Due birapporti che abbiano a comune gli elementi estremi e scambiati i medi hanno una somma = 1.

Dobbiamo dunque dimostrare che si ha:

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) + (x_1 x_3 x_2 x_4) = 1.$$

Per la (γ) abbiamo

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) + (x_1 x_3 x_2 x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)};$$

ora sviluppando il numeratore del secondo membro, e sopprimendo i termini che si distruggono, vediamo che esso è uguale a

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 - x_1 x_3 - x_2 x_4 = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)$$

cioè al denominatore, onde la frazione è = 1, c.d.d.

Indichiamo ora con λ uno dei 6 valori del birapporto, p. e. il primo

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \lambda.$$

Dal teorema a) si ha subito

$$(x_1 x_2 x_4 x_3) = \frac{1}{\lambda},$$

e dal teorema b)

$$(x_1 x_3 x_2 x_4) = 1 - \lambda.$$

Il quarto birapporto $(x_1 x_3 x_4 x_2)$ nasce dal precedente scambiando gli ultimi due elementi; dunque per a)

$$(x_1 x_3 x_4 x_2) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Il quinto $(x_1 x_4 x_2 x_3)$ nasce dal secondo scambiando gli elementi medii, onde per

$$(x_1 x_4 x_2 x_3) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Infine il sesto si ottiene dal quinto scambiando i due ultimi elementi, onde per a)

$$(x_1 x_4 x_3 x_2) = \frac{1}{(x_1 x_4 x_2 x_3)} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Riassumendo, abbiamo dunque pei 6 birapporti i valori:

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \lambda, (x_1 x_2 x_4 x_3) = \frac{1}{\lambda}, (x_1 x_3 x_2 x_4) = 1-\lambda \; (x_1 x_3 x_4 x_2) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(x_1 x_4 x_2 x_3) = \frac{\lambda-1}{\lambda}, (x_1 x_4 x_3 x_2) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Così adunque: _Se quattro elementi (numeri o punti di una punteggiata) presi in un certo ordine hanno un birapporto = λ, alterando l'ordine degli elementi stessi si hanno gli altri cinque valori del birapporto_

$$\frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

§ 5
Caso armonico

Siccome il valore λ di un birapporto può

essere un numero qualunque, è chiaro che gli altri cinque sono (in generale) distinti da questo e fra di loro. Ha interesse il ricercare in quali casi il numero dei valori distinti si abbassa. Basterà per ciò eguagliare successivamente λ (che è poi una qualunque dei 6 valori) ad uno degli altri cinque.

1.° Se poniamo $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ dovrà essere $\lambda^2 = 1$ e quindi $\lambda = +1$ ovvero $\lambda = -1$. Nel primo caso dovremo avere per la (4)

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)$$

ossia, cangiando i segni:

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = x_2 x_4 + x_1 x_3$$

od anche

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$$

e perciò o $x_1 = x_2$ o $x_3 = x_4$, contro l'ipotesi che i quattro elementi siano distinti. Questo caso è adunque impossibile.

Se supponiamo $\lambda = -1$, gli altri valori del birapporto saranno

$$\frac{1}{\lambda} = -1, \; 1 - \lambda = 2, \; \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2}, \; \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 2, \; \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{1}{2}$$

e i 6 valori si riducono dunque a tre distinti, essendo due uguali a -1, due a 2 e due a $\frac{1}{2}$.

Riferendoci ai punti A, B, C, D, vediamo

che in tal caso essendo

$$(ABCD)=(ABDC)=-1$$

i punti C, D dividono l'uno internamente l'altro esternamente il segmento AB nello stesso rapporto in valore assoluto. Si dice allora che i punti C, D dividono <u>armonicamente</u> il segmento AB od anche che C, D sono <u>coniugati armonici</u> rispetto ad A, B. Siccome poi si ha (§ 3)

$$(CDAB)=(ABCD)=-1$$

ne segue che A, B separano alla loro volta armonicamente il segmento CD. Per ciò si dice anche che i quattro punti ABCD formano un gruppo armonico, le coppie AB, CD separandosi armonicamente.

2° Se poniamo $\lambda=1-\lambda$, ne deduciamo

$$\lambda=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\lambda}=2,\ 1-\lambda=\frac{1}{2},\ \frac{1}{1-\lambda}=2,\ \frac{\lambda-1}{\lambda}=-1,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}=-1,$$

sicchè ci troviamo ancora nel caso armonico, le coppie coniugate essendo ora AD, BC ossia $x_1 x_4$, $x_2 x_3$.

3° Se poniamo $\lambda=\frac{1}{1-\lambda}$ o $\lambda=\frac{\lambda-1}{\lambda}$ abbiamo tutte due le volte l'equazione di 2° grado per λ

$$\lambda^2-\lambda+1=0$$

Ma le radici di questa sono immaginarie; e siccome noi qui supponiamo che si tratti di

punti reali della punteggiata o di numeri reali x, anche i birapporti sono reali e l'eguaglianza supposta è, nelle nostre ipotesi, impossibile.

4° Infine se uguagliamo λ all'ultimo valore $\frac{\lambda}{\lambda-1}$, abbiamo l'equazione di 2° grado

$$\lambda(\lambda-1)=\lambda$$

colle radici $\lambda=0$, $\lambda=1$. Ma anche questo caso è impossibile essendo distinti i quattro elementi.

Così riassumendo: Per quattro elementi reali il solo caso in cui 6 valori del birapporto non sono più distinti è il caso armonico, ove risultano due a due eguali ai rispettivi valori $-1, \frac{1}{2}, 2$.

Osserviamo infine che, dati ad arbitrio tre punti A, B, C esiste un solo quarto punto D coniugato armonico di C rispetto ad A, B. Se C cade nel punto medio fra A e B il coniugato armonico D diventa il punto all'infinito.

§ 6
Fascio di rette

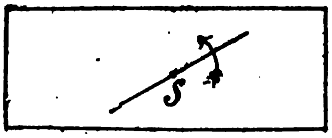
Alla punteggiata di cui abbiamo fin qui trattato la moderna geometria (projettiva) associa la considerazione di altre due forme

geometriche fondamentali (di 1ª specie) che sono:

a) il fascio di rette, cioè il sistema delle rette di un piano uscenti da un suo punto.

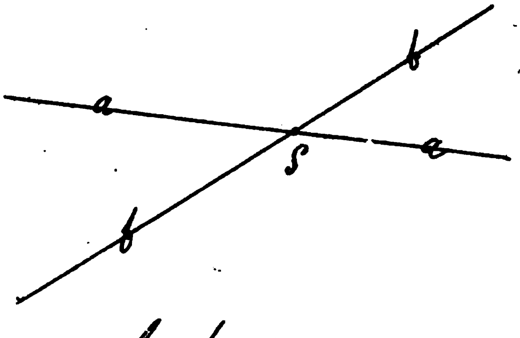
b) il fascio di piani, cioè l'insieme dei piani per una retta. Come nella punteggiata si riguarda quale elemento generatore il punto, così nel fascio di rette è riguardata come elemento la retta, nel fascio di piani il piano generico del fascio. Andiamo ora a constatare che anche in queste altre due forme geometriche si può fissare la posizione di un elemento (retta o piano) mediante un numero coordinato, corrispondente all'elemento e variabile con esso. Per ciò appunto queste due forme diconsi, come la punteggiata, ad una dimensione (di 1ª specie) la variabilità dell'elemento nella forma dipendendo da una coordinata.

Cominciando dal fascio di rette, converrà in primo luogo che, analogamente a quanto si fece per la punteggiata, si stabilisca un senso positivo di percorso dell'elemento (retta) mobile nelle forme. Nel piano π che contiene il fascio di rette di centro S fissiamo in primo luogo una determinata pagina



come pagina positiva del piano. Un raggio che si muova nel fascio, attorno ad S, può girare nel senso indicato della freccia ovvero nell'opposto; diciamo da destra verso sinistra rispetto ad un osservatore collocato sulla pagina positiva del piano, ovvero da sinistra verso destra. Uno di questi due sensi si dirà il verso positivo delle rotazioni, l'opposto il negativo. Per fissare le idee noi converremo che le rotazioni positive (sulla pagina positiva del piano) avvengano da destra verso sinistra [cioè nel senso opposto a quello delle lancette di un orologio] le negative quindi da sinistra verso destra.

Consideriamo ora due raggi qualunque a, b del fascio. Se un raggio mobile sovrapposto dapprima ad a gira nel verso positivo verrà a sovrapporsi la prima volta a b dopo aver descritto un angolo α compreso fra 0 e π, e basterà conoscere quest'angolo per fissare la posizione relativa dei due raggi a, b



(Cfr. al § 1 le considerazioni analoghe pei segmenti). Se ora al raggio mobile, sovrapposto a b, facciamo poi compiere, nel verso positivo o negativo delle rotazioni, un numero qualunque di semigiri verremo ad aumentare o a diminuire α di un multiplo di π; e viceversa qualunque rotazione che sovrapponga a a b avrà un'ampiezza data da $\alpha + n\pi$, essendo n un intero positivo o negativo. Diremo angolo $\widehat{ab}$ uno qualunque di questi angoli $\widehat{ab} = \alpha + n\pi$; così l'angolo $\widehat{ab}$ sarà definito solo a meno di multipli di π.

Prendiamo ora nel fascio un raggio o di partenza che diremo il raggio origine o zero, ed essendo a un raggio mobile nel fascio, poniamo

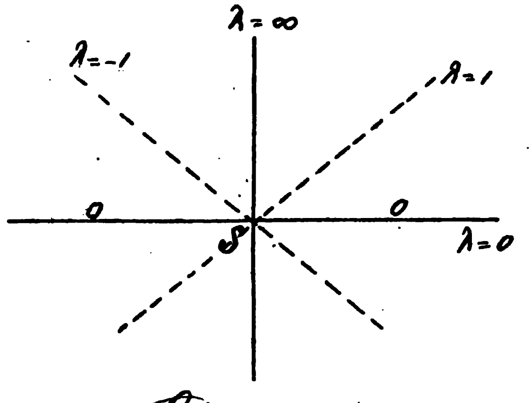
$$\widehat{oa} = \theta ;$$

θ sarà definito solo a meno di multipli di π e si dirà l'anomalia del raggio a. Basterà far variare θ da 0 a π per far descrivere al raggio mobile l'intero fascio, che è per ciò una forma rientrante in sè stessa. Potremmo così riguardare θ, variabile da 0 a π come coordinata dell'elemento mobile nel fascio.

(raggio). Ma siccome conviene sempre nei calcoli far comparire gli angoli per mezzo delle loro linee trigonometriche anzichè esplicitamente, sarà opportuno sostituire all'anomalia θ come coordinata una sua linea trigonometrica e precisamente una tale linea che non cangi di valore allora ed allora soltanto quando si aggiunga o si tolga a θ un multiplo di π. Questa ci è data dalla tangente dell'angolo θ; poniamo adunque

$$\lambda = tg\,\theta$$

e diciamo λ la coordinata del raggio mobile nel fascio per il suo modo di definizione λ dicesi anche la coordinata tangente. La coordinata tangente λ prende tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$ e ad ogni valore di λ corrisponde un solo raggio del fascio ed inversamente.



L'attuale coordinata tangente λ compie dunque per i raggi del fascio il medesimo ufficio come l'ascissa x per un punto mobile nella punteggiata.

§ 7.

Birapporto di quattro raggi in un fascio.

Sopra ogni retta del fascio si converrà il più spesso nelle applicazioni di distinguere un senso positivo dall'opposto negativo; diremo <u>semiraggio</u> una semiretta uscente da S nel suo verso positivo. Se a b sono due semiraggi, un semiraggio mobile sovrapposto dapprima ad <u>a</u>, girando nel verso positivo delle rotazioni, si sovrapporrà la prima volta a <u>b</u> dopo aver compiuta una rotazione β di ampiezza compresa fra <u>0</u> e <u>2π</u>; se questo semiraggio mobile partendo da <u>b</u> compie poi nell'uno o nell'altro senso un numero completo di giri rimarrà sempre sovrapposto a <u>b</u>. Viceversa qualunque rotazione che sovrapponga <u>a</u> a <u>b</u> differirà dalla minima positiva β per un multiplo di 2π. Indicheremo col simbolo $\widehat{ab}$ uno qualunque di questi angoli

$$\widehat{ab} = \beta + n \cdot 2\pi$$

essendo <u>n</u> un intero qualunque, positivo o negativo, ciò che si esprime più brevemente col

segno di congruenza

$$\hat{ab} \equiv \beta.$$

Siccome gli angoli figurano sempre nei nostri calcoli sotto il segno di linee trigonometriche ed angoli congrui (differenti per multipli di π) hanno le stesse linee trigonometriche, così nei calcoli la congruenza degli angoli ha il medesimo effetto dell'uguaglianza.

Se paragoniamo il simbolo $\hat{ab}$ sopra definito coll'altro $\bar{ab}$ definito al § precedente, vediamo subito che si ha

$$\hat{ab} = \bar{ab}, \text{ ovvero } \hat{ab} = \bar{ab} + \pi$$

e quindi: <u>in</u> <u>tutti</u> <u>e due</u> <u>i casi</u>

$$tg\, \hat{ab} = tg\, \bar{ab},$$

onde se contiamo l'anomalia θ (§6) nel nuovo modo sarà sempre $\lambda = tg\, \theta$ la coordinata del raggio mobile.

Introdotte le convenzioni fondamentali superiori, si estendono immediatamente le formole (1), (2), (4) del §1 pei segmenti ac gli angoli fra i semiraggi di uno stesso fascio nelle corrispondenti

(1') $\quad \hat{ab} + \hat{ba} \equiv 0 \quad$ o $\quad \hat{ba} \equiv -\hat{ab}$

(2') $\quad \hat{ab} + \hat{bc} + \hat{ca} \equiv 0 \quad$ o $\quad \hat{ab} \equiv \hat{cb} - \hat{ca}$

(4') $\quad a_1\hat{a}_2 + a_1\hat{a}_3 + \cdots + a_{\cdot}\hat{\ } + a_n\hat{a}_1 \equiv 0$

Ciò premesso consideriamo nel nostro fascio quattro raggi (semiraggi) a_1, a_2, a_3, a_4 e siano

$$\hat{oa_1} = \theta_1, \quad \hat{oa_2} = \theta_2, \quad \hat{oa_3} = \theta_3, \quad \hat{oa_4} = \theta_4$$

le loro rispettive anomalie e

$$\lambda_1 = tg\,\theta_1, \quad \lambda_2 = tg\,\theta_2, \quad \lambda_3 = tg\,\theta_3, \quad \lambda_4 = tg\,\theta_4$$

le loro corrispondenti coordinate. Come il birapporto di quattro punti di una punteggiata era dato (§ 3) dal birapporto delle loro quattro ascisse così definiremo per: birapporto dei quattro raggi a_1, a_2, a_3, a_4 il birapporto dei quattro numeri λ che ne sono le coordinate e scriveremo quindi

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = (\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

Prima di tutto trasformeremo questa espressione del birapporto di quattro raggi in guisa che ne risulti l'indipendenza dal raggio o scelto come origine. Abbiamo

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = \frac{(tg\,\hat{oa_1} - tg\,\hat{oa_3})(tg\,\hat{oa_2} - tg\,\hat{oa_4})}{(tg\,\hat{oa_1} - tg\,\hat{oa_4})(tg\,\hat{oa_2} - tg\,\hat{oa_3})},$$

ovvero moltiplicando numeratore e denominatore nel secondo membro per

$$\cos\hat{oa_1}\ \cos\hat{oa_2}\ \cos\hat{oa_3}\ \cos\hat{oa_4}$$

e ricordando le formole di sottrazione degli archi

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\text{sen}(\hat{oa_1} - \hat{oa_3}) \cdot \text{sen}(\hat{oa_2} - \hat{oa_4})}{\text{sen}(\hat{oa_1} - \hat{oa_4}) \cdot \text{sen}(\hat{oa_2} - \hat{oa_3})}$$

Ma per la (2') si ha

$$\hat{oa_1} - \hat{oa_3} \equiv a_3\hat{\ }a_1 , \quad \hat{oa_2} - \hat{oa_4} \equiv a_4\hat{\ }a_2$$
$$\hat{oa_1} - \hat{oa_4} = a_4\hat{\ }a_1 , \quad \hat{oa_2} - \hat{oa_3} \equiv a_3\hat{\ }a_2$$

e quindi

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\text{sen}(a_3\hat{\ }a_1) - \text{sen}(a_4\hat{\ }a_2)}{\text{sen}(a_4\hat{\ }a_1) \ \text{sen}(a_3\hat{\ }a_2)}$$

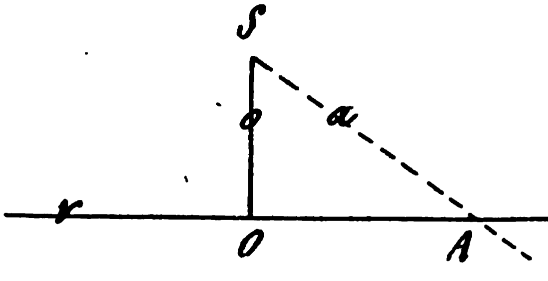
che si può anche scrivere (per la (1'))

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\text{sen}(a_1\hat{\ }a_3)}{\text{sen}(a_2\hat{\ }a_3)} : \frac{\text{sen}(a_1\hat{\ }a_4)}{\text{sen}(a_2\hat{\ }a_4)}$$

Così il birapporto è trasformato, come si voleva, in un espressione indipendente del raggio o scelto come origine e si ha il risultato: Il birapporto di quattro raggi $a_1 a_2 a_3 a_4$ di un fascio, nell'ordine scritto, è dato dal quoziente dei due rapporti dei seni degli angoli secondo cui il terzo ed il quarto raggio dividono l'angolo fra i primi due.

Dopo ciò possiamo dimostrare il seguente teorema fondamentale che dà la proprietà projettiva del birapporto: Se una trasversale qualunque r non uscente dal centro S del fascio, sega i quattro raggi $a_1 a_2 a_3 a_4$ ordinatamente nei punti $A_1 A_2 A_3 A_4$, il birap-

porto dei quattro punti è uguale al birapporto dei quattro raggi e quindi indipendente dalla posizione della trasversale r (1)



Caliamo da S la perpendicolare SO alla trasversale r (diretta positivamente da S verso r) ed assumiamo questo semiraggio o per raggio origine nel fascio. Sulla retta r stabiliamo un sistema di ascisse la cui origine sia il punto O, piede della perpendicolare abbassata da S, ed il cui verso positivo concordi con quello del fascio. Considériamo un raggio qualunque a del fascio di anomalia θ e quindi di coordinata $\lambda = tg\,\theta$ e sia A il suo punto d'incontro con r. Detta x l'ascissa di A ed indicando con p il numero positivo che misura la distanza di S da r, avremo manifestamente in grandezza e segno

$$x = p\, tg\,\theta = p\,\lambda.$$

---

(1) Questa proprietà fondamentale del birapporto era già nota agli antichi e trovasi in Pappo.

Se adunque $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono le quattro rispettive coordinate dei raggi a_1, a_2, a_3, a_4 e x_1, x_2, x_3, x_4 le ascisse dei punti corrispondenti A_1, A_2, A_3, A_4, avremo

$$x_1 = p\lambda_1,\ x_2 = p\lambda_2,\ x_3 = p\lambda_3,\ x_4 = p\lambda_4,$$

onde si ricava immediatamente

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

e quindi

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (a_1 a_2 a_3 a_4) \quad c.d.d.$$

Fin qui si è supposto che il fascio di rette avesse il centro S a distanza finita; ma anche nel caso che questo centro sia a distanza infinita, cioè il fascio sia composto di raggi paralleli, vale il teorema superiore: Una trasversale arbitraria sega quattro raggi del fascio in quattro punti il cui birapporto è indipendente dalla posizione della trasversale.

La dimostrazione è immediata, ricordando che rette parallele intercettano sopra due trasversali qualunque segmenti proporzionali. Per birapporto di quattro raggi paralleli s'intenderà quindi il birapporto dei quattro loro punti d'intersezione con una trasversale arbitraria.

§ 8
Fascio di piani

La considerazione di un fascio di piani si riporta subito a quella di un fascio di rette. Seghiamo infatti il fascio di piani con un piano perpendicolare all'asse s del fascio; otterremo un fascio di rette ciascuna delle quali individuerà il piano corrispondente e l'angolo rettilineo fra due raggi del secondo fascio misurerà l'angolo diedro fra i due piani corrispondenti. La stessa coordinata $\lambda = tg\,\theta$ che ci ha servito al § 6 ad individuare un raggio del fascio servirà ancora ad individuare il piano corrispondente e si dirà la coordinata del piano nel fascio.
Presi quattro piani arbitrarii del fascio

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

il loro birapporto si prenderà, per definizione, eguale a quello dei quattro numeri

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

che ne sono le respettive coordinate e si indicherà con $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$. Avremo quindi (§ 7): <u>Il birapporto di quattro piani di un fascio è uguale al quoziente dei due rapporti dei</u>

seni degli angoli secondo cui il terzo ed il quarto piano dividono l'angolo diedro fra i primi due.

Dopo ciò possiamo facilmente dimostrare che: qualunque trasversale r, sghemba coll'asse S del fascio,(1) sega quattro piani $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ del fascio in quattro punti $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ il cui birapporto è uguale a quello dei quattro piani.

Se la trasversale r è perpendicolare coll'asse S, si conduca per r il piano normale all'asse che incontrerà $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ in quattro rette $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$. Si avrà per definizione

$$(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4);$$

d'altra parte (§ 7)

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = (A_1\, A_2\, A_3\, A_4)$$

e per ciò

$$(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = (A_1\, A_2\, A_3\, A_4)$$

Se poi r non è perpendicolare all'asse, si conduce per r un piano qualunque π che segherà l'asse in un punto S e il fascio di piani in un fascio di raggi, in particolare $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ nei raggi $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$. Conduciamo poi in π una

---

(1) cioè non situata in un piano con S.

trasversale r' perpendicolare ad S e siano $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ i suoi punti d'incontro nei quattro raggi x, ossia coi quattro piani α. Per quanto precede avremo

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (A'_1 A'_2 A'_3 A'_4)$$

e d'altra parte (S 7)

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (A'_1 A'_2 A'_3 A'_4)$$

e per ciò ancora

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (A_1 A_2 A_3 A_4) \quad c.d.d.$$

Dopo ciò riesce d'immediata evidenza l'altra proprietà: Qualunque piano sega quattro piani del fascio in quattro raggi il cui birapporto è uguale a quello dei quattro piani.

Così abbiamo ricondotto la nozione di birapporto di quattro elementi in una forma di 1ª specie a quella del birapporto di quattro numeri (le loro coordinate), onde risulteranno applicabili in generale le proprietà del birapporto dimostrate ai §.§. 3, 4.

Da quanto siamo venuti esponendo fin qui si trae la conclusione importante: Il birapporto di quattro elementi nelle forme fondamentali di 1ª specie non viene alterato da un numero qualunque di pro-

pejani e sezioni.

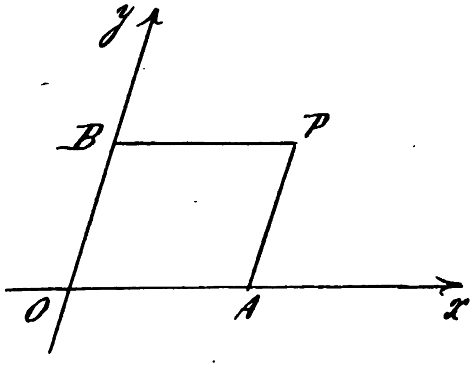
È questa appunto la proprietà che conferisce alla nozione di birapporto un'importanza fondamentale.

Capitolo 2°.
Coordinate nel piano punteggiato

§ 9
Coordinate Cartesiane nel piano

Andiamo ora ad occuparci delle coordinate nella prima forma fondamentale geometrica di 2ª specie (a due dimensioni) che si considera in geometria projettiva: il piano punteggiato.

Per fissare la posizione di un punto in un piano il metodo più frequentemente usato risulta dalle considerazioni seguenti.



Si fissino nel piano due rette Ox, Oy uscenti da un punto O. Preso nel piano un punto qualunque P, si tirino per P le parallele ad Oy, Ox che incontri-

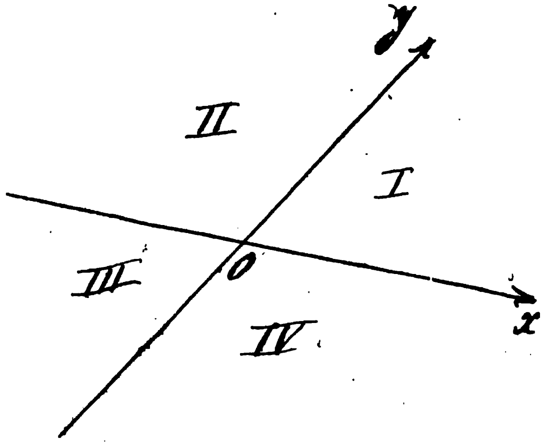
no Ox, Oy rispettivamente in A, B. È chiaro che conosceremmo la posizione di P nel piano se fosse nota la posizione di A sulla retta (punteggiata) Ox e quella di B sulla Oy. Secondo quanto si è visto al Cap. 1° basterà quindi stabilire sull'una o sull'altra un sistema di ascisse con che A, B verranno individuati da due numeri, le loro rispettive ascisse. Conviene quindi in primo luogo fissare (ad arbitrio) per ciascuna delle due rette Ox, Oy i rispettivi sensi positivi (indicati nella figura con freccie) ed inoltre sopra ciascuna di esse la rispettiva origine delle ascisse. Per semplicità si conviene di prendere questa origine comune alle due punteggiate, cioè nel loro punto comune O. Dopo ciò le posizioni di A, B vengono rispettivamente fissate dai due numeri che esprimono i valori algebrici dei segmenti $\overline{OA}$, $\overline{OB}$; indicando questi numeri con x, y:

$$\overline{OA} = x\ ,\ OB = y$$

la posizione di P nel piano verrà fissata dalla coppia di numeri (x, y). Questi due numeri x, y diconsi le <u>coordinate</u> (Cartesiane) del punto P; e come ogni punto ha due determinati numeri per coordinate così ad ogni coppia di numeri x, y, scelta ad arbitrio, corrisponde uno ed un solo punto che li ha per coordinate.

Così al punto P mobile sul piano viene come annessa una coppia di numeri (x, y) che possono variare indipendentemente l'uno dall'altro e vi ha corrispondenza biunivoca fra le posizioni di P e la coppia di numeri (x, y). Per individuare un elemento nel piano punteggiato essendo necessari <u>due</u> numeri indipendenti, questa forma geometrica dicesi a due dimensioni (di 2ª specie).

Il sistema coordinato così introdotto dicesi <u>sistema</u> <u>Cartesiano</u>, le rette fisse Ox, Oy diconsi <u>assi</u> <u>Coordinati</u>. Per comodità d'espressione si suole anche distinguere i due assi chiamando il primo Ox asse delle x, il secondo Oy asse delle y ed anche si distinguono le due coordinate x, y di un punto chiamando la prima <u>ascissa</u> la seconda <u>ordinata</u> del punto.



I due assi coordinati dividono il piano in quattro regioni od angoli e cioè:

I regione compresa dalle direzioni positive degli assi

II regione compresa

dalla direzione negativa di Ox e positiva di Oy.

III regione fra le direzioni negative degli assi

IV regione compresa dalla direzione positiva di Ox, negativa di Oy.

A seconda che il punto $P\equiv(x,y)$ (1) trovasi nell'una o nell'altra delle quattro regioni le sue coordinate offrono i segni seguenti

		x	y
nella regione	I)	+	+
" "	II)	−	+
" "	III)	−	−
" "	IV)	+	−

È da osservarsi che se insieme ad un punto $P_1\equiv(a,b)$ si considerano gli altri tre $P_2\equiv(-a,b)$, $P_3\equiv(-a,-b)$, $P_4\equiv(a,-b)$ che si ottengono cangiando solo il segno dell'una o dell'altra coordinata, questi quattro punti sono i vertici di un parallelogrammo coi lati paralleli agli assi e col centro nell'origine O. In particolare: Due punti (a,b) $(-a,-b)$ di coordinate eguali e di segno contrario sono in linea retta coll'origine O e con egual distanza da O.

Si osservi ancora che i punti dell'asse O_x

---

(1) Con questa notazione si indica che il punto P ha le coordinate x,y.

sono caratterizzati dall'avere nulla l'ordinata: $y=0$, e quelli dell'asse Oy dall'aver nulla l'ascissa: $x=0$. Il punto O ha nulle tutte due le coordinate $O \equiv (0,0)$ e dicesi perciò il punto <u>zero</u> od <u>origine</u> delle coordinate.

Gli assi coordinati possono scegliersi a piacere ortogonali (perpendicolari) od obliqui ed il sistema Cartesiano dicesi corrispondentemente ortogonale od obliquo. Il più delle volte, quando la natura della questione non indichi l'opportunità del contrario, il sistema Cartesiano si sceglie ortogonale perchè tutte le formole (metriche) della geometria analitica riescono molto più semplici.

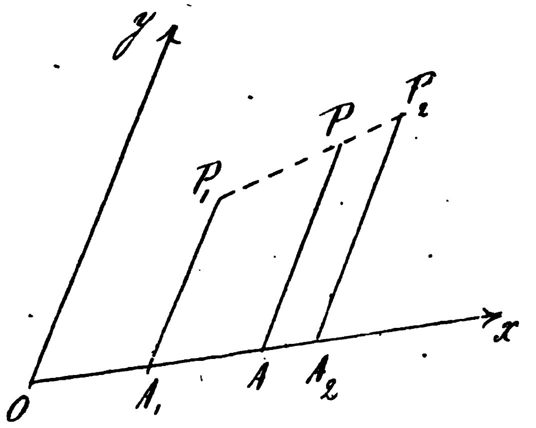
§ 10

Punteggiata nel piano.

Per individuare nel piano una punteggiata basterà dare due suoi punti P_1, P_2, e ciò facciamo, in geometria analitica, assegnando le coordinate rispettive dei due punti, siano

$$P_1 \equiv (x_1, y_1), \quad P_2 \equiv (x_2, y_2).$$

Ogni altro punto P della punteggiata sarà determinato quando si conosca (§ 2) il rapporto



secondo cui P divide il segmento P_1P_2. Proponiamoci il problema: calcolare le coordinate x, y del punto P in linea retta con $P_1 \equiv (x_1 y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2)$ conoscendo il rapporto $\frac{m}{n}$ secondo cui P divide il segmento P_1P_2.

Vediamo subito che questo problema si risolve colla formola stessa (I) o (I*) del §2 applicata separatamente, all'ascissa ed all'ordinata. Tiriamo infatti per P_1, P_2, P le parallele ad Oy fino all'incontro in A_1, A_2, A rispettivamente con Ox; avremo

$$\overline{OA_1} = x_1, \quad \overline{OA_2} = x_2, \quad \overline{OA} = x$$

Ora è manifesto che A divide il segmento A_1A_2 nello stesso rapporto in grandezza e segno come P il segmento P_1P_2. Per ciò A dividerà A_1A_2 nel rapporto dato $\frac{m}{n}$ e sarà quindi (§2) $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$. Ripetendo la medesima osservazione rispetto alle ordinate abbiamo il risultato: Le coordinate x, y del punto P cercato sono date dalle formole

$$(I) \quad x = \frac{m x_2 + n x_1}{m+n} \quad , \quad y = \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}$$

che, ponendo $\frac{m}{n} = \lambda$, possono scriversi sotto la forma equivalente:

$$(I^*) \quad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} \quad , \quad y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$$

In particolare si osservi: L'ascissa e l'ordinata del punto medio di un segmento sono rispettivamente la semisomma delle ascisse e delle ordinate degli estremi.

Si ricava ancora di qui che due punti (x_1, y_1) $(-x_1, -y_1)$ di coordinate eguali e di segno contrario hanno l'origine per punto medio del segmento che li unisce.

§ 11.

Problema della trasformazione delle coordinate. Traslazione degli assi.

Le coordinate (x, y) di un punto del piano dipendono essenzialmente dal sistema di assi fissato e cangiano al cangiare di questo. Se adoperiamo un nuovo sistema di assi $O'X$, $O'Y$, le nuove coordinate X, Y del medesimo punto (x, y) dipenderanno manifestamente soltanto dalla posizione rela-

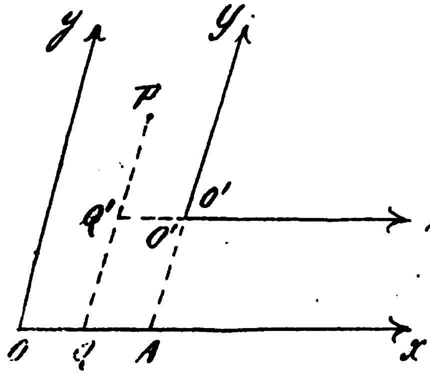
tiva dei due sistemi coordinati e dei valori di x, y, saranno cioè X, Y funzioni di x, y ed inversamente x, y di X, Y. È un problema fondamentale della geometria analitica il trovare le formole che danno il modo di passare dalle antiche alle nuove coordinate; questo dicesi il problema della trasformazione delle coordinate.

Si può decomporre il problema in due successivi più semplici:

1° passaggio di un sistema di assi Ox, Oy ad un altro $O'X$, $O'Y$ parallelo in cui è cangiata solo l'origine ma non le direzioni (positive) degli assi. Questo dicesi il problema della traslazione degli assi.

2° passaggio da un sistema (Ox, Oy) ad un altro (OX, OY) colla medesima origine, in cui sono mutate comunque le direzioni degli assi.

È chiaro infatti che componendo le formole dei due successivi passaggi, come preciseremo fra breve, otterremo le formole generali richieste.



Occupiamoci dapprima del problema della traslazione degli assi. Per farsi le

posizione relativa dei nuovi assi $O'X$, $O'Y$ rispetto agli antichi basterà conoscere le coordinate (antiche) della nuova origine O'; queste indicheremo con a, b: $O' \equiv (a, b)$. Essendo $P \equiv (x, y)$ un punto qualunque del piano tiriamo per P la parallela ad Oy (o $O'Y$) che incontri O_x in Q, $O'X$ in Q' e sia infine A il punto ove $O'Y$ incontra Ox. Abbiamo per definizione

$$\overline{OQ} = x\,,\quad \overline{O'Q'} = X\,,\quad \overline{OA} = a$$

D'altra parte la figura $O'Q'QA$ essendo un parallelogrammo si ha

$$|O'Q'| = |AQ|\,,$$

ma di più è anche in segno

$$\overline{AQ} = \overline{O'Q'} = X$$

poichè i sensi positivi di Ox, $O'X$ sono per ipotesi concordanti. Ora pei tre punti O, A, Q in linea retta si ha (§2 formola (2*))

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA}$$

cioè

$$X = x - a$$

Similmente avremo $Y = y - b$; dunque:
<u>Per una traslazione degli assi le formole di trasformazione delle coordinate sono date semplicemente dalle:</u>

$$(\text{II})\qquad x = X + a\,,\quad y = Y + b$$

ovvero

$$(II^*) \qquad X = x - a \quad , \quad Y = y - b,$$

dove (x, y) sono le antiche, X, Y le nuove coordinate e le costanti a, b indicano le coordinate antiche della nuova origine.(1)

§ 12.

Distanza di due punti nel piano

Date le coordinate $x_1 y_1$; $x_2 y_2$ di due punti $P_1 P_2$ ci proponiamo di calcolare la distanza d fra i due punti. Supponiamo in primo luogo che uno dei due punti sia l'origine delle coordinate e così domandiamo la distanza ρ di un punto $(x, y) \equiv P$ dall'origine. Tiriamo per P la parallela all'asse Oy fino all'incontro in A coll'asse delle x ed uniamo O con P. Dal triangolo OAP osservando che le lunghezze dei lati OA, AP sono i valori assoluti $|x|$ $|y|$ di x, y, abbiamo per la trigonometria

$$(1) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 - 2\,|x|\,|y| \cos (OAP).$$

---

(1) Si osservi che questo significato di a, b è manifesto dalle formole (II) stesse poichè per $X = 0$ $Y = 0$ risulta $x = a$, $y = b$

Ora denotiamo con $\underline{\omega}$ l'angolo fra $\underline{0}$ e $\underline{\pi}$ formato dalle direzioni positive degli assi; avremo

$$OAP=\omega$$

se P trovasi nella 2ª o 4ª regione dove x, y hanno segno contrario ed invece

$$OAP=\pi-\omega$$

quando P si trova nella 1ª o 3ª regione ed x, y hanno lo stesso segno. La formola (1) si cangia in tutti quattro i casi nella seguente (1)

$$(2) \qquad \rho^2 = x^2+y^2+2xy\cos\omega.$$

Così adunque: <u>La distanza ρ del punto $P\equiv(x,y)$ dall'origine è data da</u>

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega},$$

<u>dinotando con ω l'angolo degli assi.</u>

Venendo ora al caso generale ove si cerca la distanza $\underline{d}$ fra due punti qualunque $P_1\equiv(x_1 y_1)$ $P_2\equiv(x_2 y_2)$ applichiamo il metodo della traslazione degli assi che verrà usato largamente in seguito. Con una traslazione degli assi trasportiamo l'origine da O in $P_1\equiv(x_1 y_1)$. Dette X, Y le nuove coordinate del punto P_2, avremo per le (II*)

---

(1) Si ricordi che $\cos(\pi-\omega) = -\cos\omega$

$$X = x_2 - x_1 \quad , \quad Y = y_2 - y_1$$

e poichè l'angolo dei nuovi assi è ancora ω la formola (2) ci darà la richiesta

(3) $$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega.$$

È da osservarsi che quando gli assi sono ortogonali si ha $\cos\omega = 0$ e le (2)(3) si semplificano nelle altre

(2*) $$\rho^2 = x^2 + y^2$$

(3*) $$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

È bene inoltre notare che quando, fissata la pagina positiva del piano, si contino gli angoli colle convenzioni del § 7, si avrà

$$\hat{xy} = \pm\omega$$

e per ciò $\cos(\hat{xy}) = \cos\omega$, onde nelle formole (2), (3) in luogo di dare ad ω il significato dell'angolo delle direzioni positive degli assi si potrà anche intendere che sia $\omega = \hat{xy}$.

§ 13

Teoremi sulle projezioni

Per procedere alla risoluzione del secondo problema della trasformazione delle coordinate è utile premettere alcune nozioni generali sulle projezioni (ortogonali) dei segmenti,

delle quali dovremo ancora servirci nelle ricerche analoghe per lo spazio.

a) Date due rette r, r' nello spazio ed assegnata di ciascuna la direzione positiva, per angolo ω delle due direzioni positive intenderemo l'angolo fra 0 e π compreso fra due semiraggi tirati per un punto qualunque O dello spazio parallelamente a queste direzioni positive. Si osservi che se di una delle due rette r, r' si cangia il senso positivo l'angolo ω sopra definito si cangia nel suo supplementare $\pi - \omega$.

b) Quando di una retta r sia già fissato il verso positivo per ogni altra retta parallela alla r il verso positivo si assumerà concordante con quello di r, cioè sarà qui $\omega = 0$.

c) Fissata una retta r nello spazio, per projezione (ortogonale) di un punto qualsiasi P' sopra r si intende il piede P della perpendicolare abbassata da P' sopra r, ossia il punto P ove il piano condotto per P' normalmente ad r incontra r. La retta fissa r si dirà asse di projezione.

Se si considera nello spazio un segmento rettilineo qualunque $P'Q'$ per segmento projezione PQ si intende il segmento compreso nell'asse r di

projezione, dalle rispettive projezioni P, Q degli estremi, e si scrive

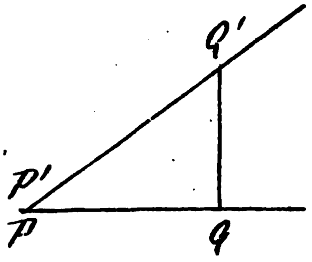
$$PQ = proj\,(P'Q').$$

Premesse queste convenzioni e definizioni andiamo a ricercare quale relazione passa fra il valore algebrico di un segmento qualsiasi P'Q' e quello della sua projezione PQ, supponendo adunque che tanto dell'asse r di projezione quanto della retta r' su cui esiste il segmento P'Q' siasi preventivamente fissato il verso positivo. Questa relazione è data dal teorema fondamentale seguente:

A) Il valore algebrico del segmento projezione è uguale al valore algebrico del segmento che si projetta moltiplicato pel coseno dell'angolo ω che formano fra loro le due direzioni positive dell'asse r di projezione e della retta r' su cui esiste il segmento projettato, in simboli:

$$\overline{PQ} = proj\,(\overline{P'Q'}) = \overline{P'Q'}\cos\omega.$$

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che, per le nostre convenzioni, non si altera il valore (algebrico) del segmento projezione spostando l'asse di projezione parallelamente a se stesso. Potremo dunque supporre che l'asse r



di proiezione esca dal primo estremo P' del segmento P'Q', indi P coincide con P'. Dal triangolo rettangolo P'Q'Q abbiamo

$$|PQ| = |P'Q'| \cos (QP'Q')$$

indi

$$\overline{PQ} = \pm \overline{P'Q'} \cos (QP'Q'),$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$ hanno ugual segno o segno contrario. Ma si vede subito che nel primo caso è $\omega = Q\hat{P'}Q'$ e nel secondo invece

$$\omega = \pi - Q\hat{P'}Q';$$

dunque in tutti i casi

$$(4) \qquad \overline{PQ} = \overline{P'Q'} \cos \omega \quad \text{c.d.d.}$$

Consideriamo ora nello spazio un numero qualunque <u>n</u> di punti

$$P_1, P_2 \dots P_n,$$

comunque distribuiti. Uniamo rettilineamente P_1 a P_2, P_2 a P_3, ... P_{n-1} a P_n, infine P_n a P_1. Formiamo così una linea poligonale chiusa, che può essere comunque intrecciata; i lati di questa linea poligonale sono i seguenti P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$, P_nP_1. Facilmente dimostriamo che sussiste il teorema:

B) <u>La somma algebrica delle proiezioni</u>

<u>dei lati della linea poligonale chiusa sopra qualunque asse di proiezione è identicamente nulla</u>:

(5) $\text{proj}(P_1P_2)+\text{proj}(P_2P_3)+\cdots+\text{proj}(P_{n-1}P_n)+\text{proj}(P_nP_1)=0.$

E infatti, se con $A_1, A_2, \ldots A_n$ indichiamo le rispettive proiezioni dei punti $P_1, P_2, \ldots P_n$ sull'asse r di proiezione, si ha identicamente (§ 1 (4)):

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}=0.$$

Consideriamo ora invece la linea poligonale <u>aperta</u> formata dagli <u>n-1</u> segmenti

$$P_1P_2,\ P_2P_3 \ldots P_{n-1}P_n;$$

dicesi <u>risultante</u> di questa linea poligonale il segmento rettilineo P_1P_n che unisce il punto di partenza P_1 al punto d'arrivo P_n della poligonale. Scrivendo la (5) sotto la forma:

$\text{proj}(P_1P_2)+\text{proj}(P_2P_3)+\cdots+\text{proj}(P_{n-1}P_n)=\text{proj}(P_1P_n),$

abbiamo il teorema:

C) <u>La somma delle proiezioni dei lati di una linea poligonale aperta, sopra qualunque asse di proiezione, è uguale alla proiezione della risultante</u>.

Questa somma dipende adunque unicamente dai due estremi della spezzata, cioè dal punto P_1 di partenza e dal punto

d'arrivo P_n; in altri termini si ha il corollario:

D) Per due linee poligonali aperte coi medesimi estremi le respettive somme delle proiezioni dei lati sopra qualunque asse di proiezione sono uguali.

§ 14

Cangiamento di direzione degli assi coordinati

Andiamo ora ad applicare i teoremi dimostrati sulle proiezioni alla risoluzione del secondo problema della trasformazione delle coordinate, premettendo le osservazioni seguenti.

1° Le figure che andiamo ora a considerare essendo in un piano, per la misurazione degli angoli ci atterremo alle convenzioni e notazioni del § 7. Così, essendo a, b due direzioni positive, ω l'angolo da esse compreso secondo la convenzione a) § prec:, avremo:

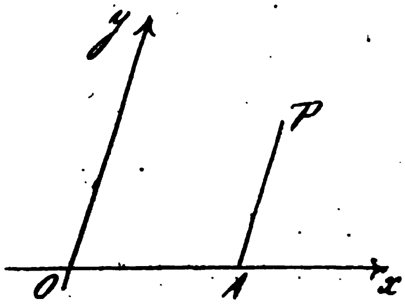
$$\hat{ab} = \pm\omega$$

e quindi in ogni caso

$$\cos(\hat{ab}) = \cos\omega .$$

Per ciò nell'applicare il teorema A) al valore del segmento proiezione potremo sostituire all'angolo ω l'angolo αb.

2° Riferito il piano ad un sistema di assi



cartesiani Ox, Oy, consideriamo un punto P qualunque e conduciamo per P la parallella ad Oy fino all'incontro in A con Ox. La spezzata OAP ha per valori algebrici dei suoi lati $\overline{OA}$, $\overline{AP}$ precisamente l'ascissa x e l'ordinata y di P.

$$\overline{OA} = x \quad , \overline{AP} = y \text{ (1)}$$

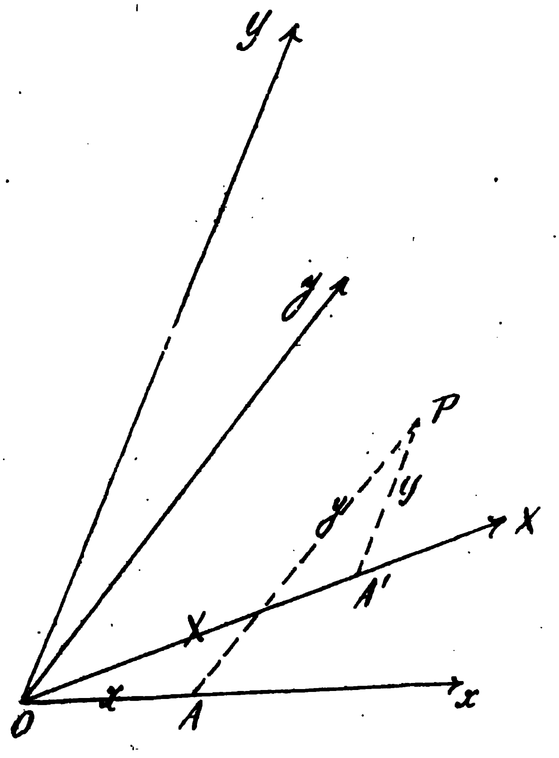
Ciò premesso, supponiamo che si voglia passare dagli assi Ox, Oy ai nuovi OX, OY colla medesima origine. Fissati gli antichi assi, la posizione dei nuovi risulterà perfettamente determinata, insieme colle loro direzioni positive, quando si diano i valori degli angoli

$$\widehat{OX}, \; \widehat{OY},$$

dove qui i simboli x, X, Y stanno ad indicare le

---

(1) Si rammenti che sulla parallela AP alla Oy il verso positivo si assume concordante con quello di Oy (§ 13 61).



rispettive direzioni positive degli assi

$$Ox,\ OX,\ OY;$$

porremo

$$\hat{xX} = \alpha\ ,\ \hat{xY} = \beta$$

ed inoltre

$$\hat{xy} = \omega\ .$$

Essendo P un punto qualunque del piano, x, y le sue antiche, X, Y le sue nuove coordinate, costruiamo, secondo quanto abbiamo detto sopra, le due spezzate OAP, OA'P, i valori algebrici dei cui lati sono

$$\overline{OA} = x\ ,\ \overline{AP} = y$$
$$\overline{OA'} = X\ ,\ \overline{A'P} = Y\ .$$

Avendo queste due spezzate i medesimi estremi O, P, la somma delle projezioni dei lati dell'una su qualunque asse (nel piano) di direzione r sarà eguale alla somma delle projezioni dei lati dell'altra (teorema II) § preced.^{te}): si avrà cioè:

$$(6)\quad x\cos(\hat{xr}) + y\cos(\hat{yr}) = X\cos(\hat{Xr}) + Y\cos(\hat{Yr})\ .$$

Se assumiamo un nuovo asse r' di

proiezione normale ad r avremo

$$\widehat{xr'} \equiv \widehat{xr} + \frac{\pi}{2}$$

indi

$$\cos(\widehat{xr'}) = -\,\mathrm{sen}\,(\widehat{xr})$$

e analogamente

$$\cos(\widehat{yr'}) = -\mathrm{sen}(\widehat{yr}),\quad \cos(\widehat{Xr'}) = -\,\mathrm{sen}(\widehat{Xr})$$
$$\cos(\widehat{Yr'}) = -\mathrm{sen}(\widehat{Yr}).$$

La (6) diventa così

(7) $$x\,\mathrm{sen}\,(\widehat{xr}) + y\,\mathrm{sen}(\widehat{yr}) = X\,\mathrm{sen}\,(\widehat{Xr}) + Y\,\mathrm{sen}(\widehat{Yr}).$$

In questa formola generale facciamo coincidere dapprima r con y, poi r con x e ne dedurremo

(8) $$\begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\widehat{xy}) = X\,\mathrm{sen}\,(\widehat{Xy}) + Y\,\mathrm{sen}\,(\widehat{Yy}) \\ y\,\mathrm{sen}(\widehat{xy}) = X\,\mathrm{sen}(\widehat{xX}) + Y\,\mathrm{sen}\,(\widehat{xY}) \end{cases}$$

Rammentando che si è posto

$$\widehat{xX} = \alpha, \quad \widehat{xY} = \beta, \quad \widehat{xy} = \omega,$$

ed osservando inoltre che si ha

$$\widehat{Xy} \equiv \widehat{xy} - \widehat{xX} \equiv \omega - \alpha$$
$$\widehat{Yy} \equiv \widehat{xy} - \widehat{xY} \equiv \omega - \beta$$

le (8) ci danno le formole richieste

(III) $$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{sen}(\omega-\alpha)}{\mathrm{sen}\,\omega} X + \dfrac{\mathrm{sen}\,(\omega-\beta)}{\mathrm{sen}\,\omega} Y \\[2ex] y = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\omega} X + \dfrac{\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{sen}\,\omega} Y \end{cases}$$

Queste esprimono le antiche coordinate x, y per le nuove X, Y; vediamo così che: <u>le x, y sono funzioni lineari ed omogenee di X, Y, cioè espressioni della forma</u>

$$(9)\qquad \begin{cases} x = aX + bY \\ y = cX + dY . \end{cases}$$

I valori dei coefficienti costanti a, b, c, d della <u>sostituzione</u> <u>lineare</u> <u>omogenea</u> sono dati effettivamente nelle (III) da quozienti di seni di angoli fissi, dipendenti dalla posizione relativa dei due sistemi coordinati.

È ben naturale che, invertendo la denominazione di nuovi ed antichi assi, si potranno scrivere le (III) risolute rapporto ad X, Y sotto la forma

$$(10)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\operatorname{sen}(\omega'-\alpha')}{\operatorname{sen}\omega'}\,x + \dfrac{\operatorname{sen}(\omega'-\beta')}{\operatorname{sen}\omega'}\,y \\[2ex] Y = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\omega}\,x + \dfrac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\omega'}\,y \end{cases}$$

ove si ponga

$$\omega' = \widehat{XY}, \quad \alpha' = \widehat{Xx}, \quad \beta' \equiv \widehat{Xy} .$$

Esprimendo ω', α', β' per ω, α, β si ha

$$\omega' = \widehat{XY} \equiv \widehat{xY} - \widehat{xX} \equiv \beta - \alpha$$

$$\alpha' = \widehat{Xx} \equiv -\widehat{xX} \equiv -\alpha$$

$$\beta' \equiv \widehat{Xy} \equiv \widehat{xy} - \widehat{xX} \equiv \omega - \alpha$$

e le (10) assumeranno quindi la forma

$$(III^*)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\,x + \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\beta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\,y \\[2ex] Y = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\,x + \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\,y \end{cases}$$

Si possono del resto dedurre direttamente queste dalle (III) risolvendole rapporto ad X, Y, per il che basterà osservare che il valore del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}\omega} & \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\beta)}{\operatorname{sen}\omega} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega} & \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\omega-\alpha)\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}(\omega-\beta)\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

è dato da

$$(10^*)\qquad \Delta = \frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{\operatorname{sen}\omega'}{\operatorname{sen}\omega}$$

§ 15.

Casi particolari notevoli

Delle formole generali stabilite consideriamo ora alcuni casi speciali che più frequente-

mente ricorrono nelle applicazioni.

1° Suppongasi che tanto l'antico quanto il nuovo sistema coordinato sia ortogonale e poichè le direzioni positive degli assi sono in nostro arbitrio supponiamo di più che gli angoli $\hat{xy}$, $\hat{XY}$ abbiano il valore $\frac{\pi}{2}$ (non $\frac{3\pi}{2}$). Stante alle nostre convenzioni sul senso positivo degli angoli (§ 7) ciò significa che per un osservatore collocato in O sulla pagina positiva del piano xy (XY) e che guarda verso la direzione positiva dell'asse delle x (X) quella dell'asse delle y (Y) si stenderà alla sinistra. Nelle nostre formole generali dovremo fare

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \omega' \equiv \beta - \alpha \equiv \frac{\pi}{2}$$

cioè

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \beta \equiv \alpha + \frac{\pi}{2},$$

onde le (III), (III*) diventano:

$$(12) \quad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

$$(12^*) \quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ Y = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Queste sono le formole per la rotazione di un angolo α (nel verso positivo) degli assi Cartesiani or-

togonali.

Si osservi che la sostituzione lineare omogenea (12) è tale che fra le antiche variabili (x, y) e le nuove $(X Y)$ sussiste l'identità

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2.$$

Che così dovesse accadere era evidente a priori perchè in questa relazione il primo ed il secondo membro esprimano il quadrato ρ^2 della distanza del punto $P = (x, y) = (X Y)$ dall'origine (§ 12 (2°)). Una sostituzione come la (12) dicesi una sostituzione ortogonale (destrorsa).

2° Vogliasi sostituire un sistema ortogonale di assi ad uno obliquo o viceversa. Se il sistema obliquo è Ox, Oy si può per ciò tener fisso l'asse delle x (col suo senso positivo) e cangiare l'asse delle y nel nuovo OY ortogonale ad Ox. Supponendo

$$\widehat{xY} = \beta = \frac{\pi}{2},$$

avremo da fare nelle nostre formole generali

$$\alpha = 0 \quad , \beta = \frac{\pi}{2}$$

e perciò le (III) diventeranno

$$(13) \qquad \begin{cases} x = X - \cot\omega \, Y \\ y = \dfrac{Y}{\operatorname{sen}\omega} \end{cases}$$

e le inverse (III*)

$$(13^*) \quad \begin{cases} X = x + \cos\omega\, y \\ Y = y \operatorname{sen}\omega \end{cases}$$

Le prime (13) servono a passare dal sistema ortogonale all'obliquo, le seconde (13*) al passaggio inverso.

5°. Per rendere ortogonale il sistema coordinato possiamo più simmetricamente sostituire agli assi antichi obliqui la bisettrice interna ed esterna del loro angolo. Ciò possiamo precisare colle posizioni

$$\widehat{xX} = \alpha \equiv \frac{\omega}{2}, \quad \widehat{xY} = \beta \equiv \frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$$

e allora le formole (III) diventano

$$(14) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{\cos\frac{\omega}{2}} - \dfrac{Y}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}\right) \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{\cos\frac{\omega}{2}} + \dfrac{Y}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}\right) \end{cases}$$

e le (III*) danno le inverse

$$(14^*) \quad \begin{cases} X = \cos\frac{\omega}{2} \cdot (x + y) \\ Y = \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\,(y - x). \end{cases}$$

§ 16

Formole generali di trasformazione delle coordinate

Ritorniamo ora al problema generale di trasformazione delle coordinate e supponiamo che i nuovi assi $O'X$, $O'Y$ abbiano insieme diversa origine e direzioni diverse dai primitivi Ox, Oy. Consideriamo un sistema ausiliario di assi $O'\xi$, $O'\eta$ che abbiano l'origine dei nuovi assi e le direzioni degli antichi. Siano poi x, y le coordinate di un punto P qualsiasi del piano riferito agli assi antichi (Ox, Oy; X, Y le coordinate nuove di P e ξ, η quelle di P stesso riferito agli assi ausiliari.

Il passaggio dall'antico sistema all'ausiliario si effettua colle formole (II) di traslazione degli assi

$$x = \xi + a \quad , \quad y = \eta + b,$$

dinotando con a, b le coordinate antiche della nuova origine. Per passare poi dal sistema ausiliario al nuovo abbiamo le (III), dove soltanto in luogo di x, y dobbiamo scrivere ξ, η. Portando questi valori di ξ, η nelle precedenti, abbiamo

"§16"

così le formole definitive:

$$
(\text{IV}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}\omega} X + \dfrac{\operatorname{sen}(\omega-\beta)}{\operatorname{sen}\omega} Y + a \\[2ex] y = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega} X + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} Y + b \end{cases}
$$

che sono le formole più generali per la trasformazione delle coordinate Cartesiane. Come si vede: le antiche coordinate sono funzioni lineari ed intere delle nuove (e viceversa!)

È questo un fatto della massima importanza perchè sopra di esso si fonda, come vedremo, una classificazione delle curve (algebriche) in base al teorema seguente:

Ogni funzione razionale intera delle due variabili x, y di grado m, sia $f(x,y)$,(1) si cangia per

---

(1) Come è noto una tale funzione è una somma di termini tutti della forma

$$A x^r y^s$$

dove r, s, sono esponenti interi positivi o nulli ed A è un coefficiente. La funzione

$$f(x,y) = \Sigma A x^r y^s$$

dicesi di grado m se in tutti i termini la somma $r+s$ degli esponenti non supera m ed in uno al.

la sostituzione (IV) in un'altra funzione razionale intera $F(X,Y)$ delle nuove variabili del medesimo grado.

Facendo in ogni termine $Ax^r y^s$ della $f(x,y)$ la sostituzione (IV) e sviluppando, è manifesto che si otterrà un'espressione razionale intera in X, Y ed ogni termine proveniente da $Ax^r y^s$ non potrà certo avere un grado superiore ad $r+s$. Così nel passaggio da $f(x,y)$ ad $F(X,Y)$ il grado non può crescere; e non può quindi nemmeno diminuire che allora nel passaggio inverso il grado crescerebbe.

§ 17.
Coordinate polari

Fino ad ora per individuare la posizione di un punto nel piano ci siamo serviti esclusivamente del sistema Cartesiano. Ma si possono ideare infiniti altri modi di fissare la posizione di un punto nel piano (od in una regione di esso), facendo corrispondere al punto una coppia di numeri (coordinate del punto) che lo indi-

---

mano è effettivamente = m

riducano e sono variabili col punto P.

Il sistema più usato, nelle applicazioni elementari della geometria analitica, dopo il sistema Cartesiano è il così detto sistema delle coordinate polari, di cui passiamo ora a trattare.

Fissiamo nel piano un punto O che si dirà il polo od origine e un semiraggio o uscente da O che prenderà il nome di asse polare. Preso un punto qualunque P nel piano, conduciamo il semiraggio p che da O va verso P. La posizione di P nel piano sarà nota quando sia nota:

1° la posizione del semiraggio p

2° la distanza di P da O.

Il primo elemento è fissato dall'anomalia θ fra 0 e 2π del semiraggio p prendendo per semiraggio origine l'asse polare (87). Il secondo elemento è dato dal numero positivo ρ che misura la lunghezza del segmento OP.

Questi due numeri ρ, θ diconsi le coordinate polari del punto P; il primo dicesi il raggio vettore, il secondo l'anomalia o l'angolo polare di P.

Come si è detto sopra, per avere tutti i punti del piano basta far variare θ fra 0 e 2π e ρ per valori positivi (fra 0 e +∞). Ma nulla ci im-

pedisce di ammettere tanto per θ quanto per ρ valori positivi o negativi qualunque (fra $-\infty$ e $+\infty$). Il valore di θ ci fisserà un raggio uscente da O e la sua direzione positiva r (§ 7) e ρ sarà il valore *algebrico* del segmento OP. Se si tratta soltanto di fissare la posizione di punti isolati nel piano basterà attenersi al primo significato più elementare e restrittivo delle coordinate polari.

Ma quando si debba considerare un punto variabile nel piano sarà in generale più opportuno dare a ρ, θ il loro significato più generale (variabilità illimitata); altrimenti avverrebbe che mentre il punto si muove con *continuità* le sue coordinate potrebbero soffrire invece cambiamenti bruschi di valore. In altre parole punti fra loro vicinissimi potrebbero avere coordinate non prossime fra loro. Così, ammettendo anomalie solo fra 0 e 2π, due punti vicinissimi fra loro ed all'asse polare e situati da parti opposte di questo avrebbero anomalie la cui differenza invece che piccolissima sarebbe prossima a 2π. Così pure ammettendo per ρ solo valori positivi, l'anomalia di un punto che movendosi sopra un raggio per O traversasse il polo O varierebbe bruscamente di π.

Quando non si dica il contrario intenderemo di dare alle coordinate polari ρ, θ il significato più generale, cioè variabilità illimitata. Solo converrà tener presente che mentre ad ogni coppia (ρ, θ) di coordinate polari corrisponde un solo punto P del piano, invece ad ogni punto P del piano apparterranno infinite coppie di coordinate polari. Queste si ottengono da una fissa (ρ_1, θ_1) nel modo seguente: 1° aumentando θ_1 di un multiplo qualunque (positivo o negativo) di 2π e lasciando ρ_1 invariato; ovvero 2° aumentando θ_1 di un multiplo dispari di π e cangiando il segno ρ_1, ossia brevemente colle formole

$$\rho = \rho_1 , \quad \theta = \theta_1 + n \cdot 2\pi$$

o colle altre (n intero)

$$\rho = -\rho_1 , \quad \theta = \theta_1 + (2n+1)\pi$$

È quasi superfluo avvertire che per $\rho = 0$, con qualunque anomalia θ, si ha come unico punto corrispondente il polo.

§ 18

Relazioni fra le coordinate polari e le cartesiane

Supposto stabilito nel piano un sistema Cartesiano di assi ed un sistema polare, importa di ricercare come si passa dalle coordinate Cartesiane di un punto alle polari e viceversa. Siccome conosciamo già le formole di passaggio da un sistema Cartesiano ad un altro qualunque basterà evidentemente risolvere la questione per un sistema Cartesiano ortogonale scelto nella relazione più semplice col sistema polare.

Si prenderà il polo O per origine del sistema Cartesiano e la direzione positiva dell'asse polare o per direzione positiva dell'asse Ox, indi l'asse Oy in guisa che sia $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$.

Siano x, y le coordinate cartesiane di un punto P e ρ, θ le sue coordinate polari nel significato più generale. Per trovare le formole richieste basta applicare il teorema A) della teoria delle proiezioni (§ 13) osservando che se con p si indica la direzione positiva (comunque scelta) della retta OP si ha

$$\widehat{xp} = \theta, \quad \overline{OP} = \rho.$$

Ora le projezioni ortogonali del segmento $\overline{OP}$ sugli assi Ox, Oy sono precisamente, in grandezza e segno, la x e la y di P e si ha quindi

$$x = \rho \cos(\widehat{xp}) \quad y = \rho\cos(\widehat{yp}).$$

ma essendo

$$\widehat{xp} \equiv \theta, \quad \widehat{yp} \equiv \widehat{xp} - \widehat{xy} \equiv \theta - \frac{\pi}{2}$$

ne deduciamo immediatamente

$$(V) \qquad x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta;$$

queste sono le formole del passaggio dalle coordinate polari alle Cartesiane. Pel passaggio inverso si deducono le formole

$$(V^*) \quad \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}.$$

Dalle (V), (V*) possiamo ora dedurre nuovamente i resultati ottenuti al § prec: con considerazioni dirette. Se sono dati ρ e θ le (V) individuano x, y indi il punto P. Dato invece P, cioè x, y, le (V*) determinano ρ a meno del segno; successivamente, essendo $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ perfettamente fissati, l'anomalia θ viene fissata a meno di multipli di 2π ed il cangiamento di segno di ρ facendo cangiare di segno insieme $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ induce nell'anomalia θ un aumento di un multiplo in-

pari di x.

Notiamo ancora la formola che dà la distanza $\underline{d}$ di due punti P, P' le cui rispettive coordinate polari siano (ρ, θ), (ρ', θ'). Se x, y ed x', y' sono le loro rispettive coordinate Cartesiane, abbiamo le (V) e le analoghe

$$x' = \rho' \cos \theta', \quad y' = \rho' \operatorname{sen} \theta'.$$

Ma

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

e sostituendo

$$d^2 = (\rho \cos \theta - \rho' \cos \theta')^2 + (\rho \operatorname{sen} \theta - \rho' \operatorname{sen} \theta')^2 =$$
$$= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'(\cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta');$$

si ha così la formola definitiva

$$(15) \qquad d^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta'),$$

che sarebbe anche facile stabilire direttamente.

§ 19.

Cenno di sistemi più generali di coordinate

Sebbene nel corso di queste lezioni abbiamo da servirci soltanto dei sistemi coordinati Cartesiano e polare, non sarà inutile formarsi un concetto del principio comune che li informa, il quale generalizzato porta alla nozione più

generale di sistemi coordinati nel piano o sopra una qualunque superficie curva.

Riferito il piano ad un sistema Cartesiano (ortogonale od obliquo) il determinare un punto P mediante la sua ascissa $x = a$ e la sua ordinata $y = b$ equivale a individuarlo come punto d'intersezione delle due rette tirate per P parallelamente agli assi. Variando P comunque nel piano, la prima parallela percorre tutto il fascio delle parallele all'asse Oy e la seconda quello delle parallele all'asse Ox. Abbiamo così il piano solcato da un doppio sistema di linee (rette parallele) formato in guisa che per ogni punto del piano passa una sola linea del 1° ed una sola linea del 2° sistema. Le coordinate x, y del punto sono rispettivamente parametri che servono, l'uno x a individuare la linea del 1°, l'altro y la linea del 2° sistema uscente da P.

Nel sistema polare, adottando qui il significato ristretto di coordinate polari (ρ, θ), il dare $\rho = \rho_0$ significa conoscere il circolo col centro nel polo che passa per il punto P; il dare poi $\theta = \theta_0$ significa conoscere (nel suo verso positivo da O verso P) la retta uscente dal polo e contenente P. An-

che qui il punto P è individuato come intersezione di due linee di cui una è una retta del fascio col centro in O, l'altra un circolo col centro in O. Variando P nel piano la retta descrive il fascio di centro O ed il circolo il sistema di circoli col centro comune in O. Il piano è nuovamente ricoperto da un doppio sistema di linee (rette e circoli) tali che per ogni punto P passa una linea del 1° ed una linea del 2° sistema e le coordinate θ, ρ del punto sono nuovamente i parametri che individuano ciascuna linea nel proprio sistema.

È facile ora intendere come ci possiamo elevare da questi due casi particolari al concetto generale di coordinate di un punto nel piano. Ogniqualvolta il piano, o la regione del piano che si studia, è ricoperto da un doppio sistema di linee (rette o curve) così costituito che per ogni punto del piano (di quella regione) passi una sola linea di ciascun sistema e quelle due linee non abbiano nella regione alcun altro punto comune potremo individuare il punto come intersezione di quelle due linee. Ciascuna linea, nel proprio sistema, sarà individuata da un valore del parametro la cui variazione accompagna

il variare della linea nel sistema. I due parametri insieme danno le coordinate (curvilinee) del punto e le linee dei due sistemi, che costituiscono la rete da cui è ricoperta la regione considerata del piano, si diranno le linee coordinate.

È manifesto che questo principio generale si applica, come già si è detto, a qualunque superficie piana o curva. Così l'esempio famigliare della determinazione di un punto sulla sfera mediante la latitudine e la longitudine del punto è evidentemente subordinato a questo principio. Il valore della latitudine fissa il parallelo, quello della longitudine il meridiano per il punto e la rete delle linee coordinate è costituita dai paralleli e dai meridiani da cui la sfera è ricoperta.

Terminiamo queste generalità coll'addurre due nuovi esempi di sistemi coordinati nel piano.

a) Coordinate bipolari. Presi nel piano due punti fissi F, F' consideriamo una delle due regioni in cui la retta FF' divide il piano. Ogni punto P di questa regione è individuato senza ambiguità dalle sue due distanze dai

punti fissi F F' che diconsi i poli. Se indichiamo con ρ, ρ' i numeri positivi che misurano queste distanze, potremo assumere ρ, ρ' come coordinate del punto P. Queste diconsi coordinate bipolari. La rete delle linee coordinate è qui costituita dai due sistemi di circoli coi centri in F, F'.

b) Coordinate ellittiche. Dalle coordinate bipolari si passa ad un sistema ben più importante, quello delle coordinate ellittiche, semplicemente assumendo come coordinate di P in luogo di ρ, ρ' la loro somma u e la loro differenza v:

$$u = \rho + \rho', \quad v = \rho - \rho'.$$

Allora le linee coordinate u = cost^{te}, v = cost^{te} sono (come si vedrà più tardi) le ellissi e le iperbole aventi a comune i fuochi in F, F'.

c) Consideriamo i due fasci di rette di centri F, F'; possiamo individuare una retta del 1° fascio mediante la sua anomalia θ e così una del 2° mediante l'anomalia corrispondente θ'. Allora θ, θ' potranno assumersi come coordinate di un punto e le linee coordinate saranno qui le rette dei due fasci.

Capitolo 3°

Equazioni delle curve - Equazione della retta.

§. 20

Esempi di equazioni di luoghi geometrici

Arriviamo ora al concetto fondamentale della geometria analitica (piana): alla rappresentazione analitica di una curva nel piano mediante un'equazione che lega le coordinate (cartesiane o polari) di un suo punto variabile.

Ma per meglio intendere il concetto generale trattiamo prima alcuni esempi speciali.

1° Retta.

Vediamo in primo luogo quale è l'insieme di tutti i punti del piano le cui coordinate Cartesiane x, y (ortogonali od oblique) soddisfano una data equazione lineare

$$(16)\qquad ax + by + c = 0.$$

Se in questa equazione manca la y ovvero la x essa si riduce alla forma

$$x = \alpha \quad o \quad y = \beta,$$

α, β indicando costanti. Tutti i punti che hanno la medesima ascissa (ordinata) sono evidentemente situati sopra una parallela all'asse Oy (Ox); per ciò in questo caso il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano la (16) è una linea retta (parallela ad uno degli assi).

Se la (16) contiene la y, scriviamola risoluta rapporto alla y.

$$(16^*) \qquad y = mx + n,$$

dove le nuove costanti m, n avranno i valori $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$. Se $P_1 \equiv (x_1 y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2)$ sono due punti qualunque del luogo avremo

$$(17) \qquad y_1 = mx_1 + n, \quad y_2 = mx_2 + n.$$

Consideriamo ora un terzo punto P_3 in linea retta con P_1, P_2; se diciamo $\frac{p}{q}$ il rapporto secondo cui divide il segmento P_1P_2 ed x_3, y_3 le coordinate di P_3 avremo (§ 10)

$$x_3 = \frac{px_2 + qx_1}{p+q}, \quad y_3 = \frac{py_2 + qy_1}{p+q}$$

quindi per le (17)

$$y_3 = \frac{p(mx_2+n) + q(mx_1+n)}{p+q} = mx_3 + n;$$

dunque P_3 apparterrà ugualmente al luogo, soddisfacendo le sue coordinate $x_3 y_3$ alla (16*).

Viceversa se P_3 è un terzo punto del luogo, esso è in linea retta con P_1, P_2 poichè, avendosi insieme alle (17) l'altra

$$y_3 = m x_3 + n,$$

se si determina il rapporto $\frac{p}{q}$ in guisa che sia

$$x_3 = \frac{p x_2 + q x_1}{p+q}, \quad (1)$$

ne risulterà

$$y_3 = \frac{p y_2 + q y_1}{p+q}.$$

Concludiamo adunque che in tutti i casi: Il luogo di tutti i punti del piano le cui coordinate Cartesiane soddisfano un'equazione lineare (16) è una linea retta.

Brevemente si dice perciò che la (16) è l'equazione della retta, per esprimere che tutti e soli i punti della retta soddisfano colle loro coordinate quest'equazione.

2.° Circolo

Supposti gli assi ortogonali, si consideri l'equazione

---

(1) Per ciò dobbiamo prendere

$$\frac{p}{q} = \frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$$

$$(18)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

dove a, b, r sono tre costanti. Qual'è il luogo di tutti i punti del piano che soddisfano questa equazione? (1)

Se consideriamo nel piano il punto C di coordinate a, b, la (18) esprime (§ 12) che la distanza del punto $P\equiv(x,y)$ dal punto fisso $C\equiv(a,b)$ è costantemente $=r$. Dunque tutti e soli i punti della circonferenza col centro in C e di raggio $=r$ soddisfano la (18). Per questo si dice che la (18) è l'equazione del circolo.

In particolare se il centro del circolo è nell'origine la sua equazione sarà

$$x^2+y^2=r^2.$$

Abbiamo supposto per semplicità gli assi ortogonali. In assi obliqui, l'equazione del circolo sarà (§ 12)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=r^2,$$

essendo ω l'angolo degli assi.

3° Ellisse

Nei due esempi addotti abbiamo inter=

---

(1) Per abbreviare diciamo che un punto soddisfa un'equazione se le sue coordinate soddisfano quest'equazione.

pretato un'equazione data fra (x, y) come equazione di una linea (retta, circolo). Qui diamo un esempio inverso considerando una curva definita geometricamente e cercando la sua equazione. Scegliamo come esempio la curva che porta il nome di ellisse ed è una delle tre sezioni coniche di cui ci occuperemo in seguito. Presi nel piano due punti fissi F, F' (fuochi) consideriamo la curva luogo dei punti che hanno costante la somma delle distanze ρ, ρ' dai due punti fissi. Questa curva dicesi appunto ellisse ed i punti fissi F, F' diconsi i suoi fuochi.

I punti F, F' abbiano una distanza $= 2c$; consideriamo il loro punto medio O e prendiamo O per origine, FOF come asse delle x diretto positivamente da O in F e l'asse Oy perpendicolare. Le coordinate di F saranno (c, 0) quelle di F'(-c, 0); per ciò le distanze ρ, ρ' di un punto $P \equiv (x, y)$ da F, F' rispettivamente avremo

$$\rho = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\rho' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,.$$

I punti dell'ellisse caratterizzati

dall'avere costante, diciamo $= 2a$,[1] la somma $\rho+\rho'$. Per ciò l'equazione della curva è

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

assumendo pei radicali i loro valori positivi.

Si può ridurre questa equazione a forma razionale liberandola dai radicali. Perciò scriviamola così

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ed elevando al quadrato e riducendo verrà

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ossia

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

e quadrando nuovamente

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2.$$

Ponendo $a^2-c^2=b^2$, questa si scrive

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

---

(1) Naturalmente deve essere nel triangolo FPF' $\rho+\rho'>2c$, cioè la costante $a>c$.

ed è la domandata <u>equazione</u> <u>dell'</u> <u>ellisse</u>.

§ 21.

Equazione di una curva.

Vediamo ora di elevarci da questi casi speciali al concetto generale dell'equazione di una curva.

Finchè le coordinate x, y di un punto P del piano si riguardano come variabili affatto indipendenti l'una dall'altra il punto P può occupare qualunque posizione nel piano. Ma supponiamo di legare queste due variabili fra loro mediante un'equazione qualunque, che indichiamo con simbolo funzionale

$$(19) \qquad f(x, y) = 0,$$

e di voler considerare la totalità dei punti del piano le cui coordinate x, y soddisfano la (19). Le due variabili x, y, legate dalla (19), non sono più indipendenti, bensì funzioni l'una dell'altra, p. e. la y della x, per modo che, dato il valore della x (generalmente entro convenienti intervalli), si ha uno o più corrispondenti valori della y, ciò che si esprime col simbolo funzionale

$$(20) \qquad y = \varphi(x)$$

equivalente alla (19). Supponiamo inoltre che la $\varphi(x)$ sia una funzione <u>continua</u> della $\underline{x}$, cioè che facendo variare la variabile indipendente x per gradi insensibili anche la funzione $y=\varphi(x)$ varii di tanto poco quanto si vuole. Se diamo ora alla $\underline{x}$ una serie discreta di valori

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots,$$

vicini del resto l'uno all'altro quanto si vuole, e calcoliamo i corrispondenti valori della y siano

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots\ldots,$$

i punti

$$P_1 \equiv (x_1 y_1), P_2 \equiv (x_2 y_2), P_3 \equiv (x_3 y_3) \ldots$$

formeranno una serie discreta di punti, vicini ciascuno al successivo di tanto poco quanto si vuole, e tutti soddisferanno colle loro coordinate l'equazione (19) ossia la (20).

Immaginiamo ora che in luogo di far variare $\underline{x}$ per una serie discreta di valori si faccia variare la $\underline{x}$ con continuità (entro l'intervallo o gli intervalli per cui la funzione $\varphi(x)$ è definita) ed ogni volta si calcoli il corrispondente valore e si segni sul piano il punto $P \equiv (x, y)$. Questo al variare della $\underline{x}$ si muoverà con con-

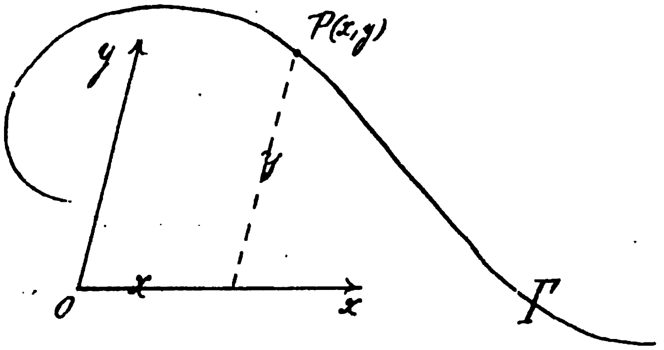
tinuità nel piano e descriverà una linea continua o curva, che almeno nei casi ordinarî sarà una effettiva curva nel senso intuitivo geometrico. (1)

La curva di cui si tratta è così il luogo di tutti i punti del piano le cui coordinate soddisfano la (19), la quale dicesi perciò l'equazione della curva.

Abbiamo visto così come ogni equazione (19) fra le coordinate variabili di un punto si interpreti geometricamente come equazione di una curva. Vediamo ora inversamente come ogni curva piana, generata con determinata legge (geometrica o meccanica), abbia una corrispondente equazione. Immaginiamo una tale curva Γ e riferiamola a due assi Cartesia-

---

(1) Lasciando alla funzione $\varphi(x)$ tutta la generalità di funzione nel senso odierno (di Dirichlet) può darsi benissimo che venga a mancare questa rappresentazione geometrica in senso stretto; ma sarebbe inutile insistervi qui essendo che questi casi non si presentano mai nelle ordinarie applicazioni e tanto meno nella geometria analitica elementare.



ni Ox, Oy. Se consideriamo un punto $P=(x,y)$ che si muova sulla curva descrivendola, le coordinate x, y saranno ambedue variabili, ma evidentemente data la x, diciamo $x=a$, ne risulteranno determinati uno o più valori della y corrispondenti ai punti ove la retta d'equazione $x=a$ (§ prec.) sega la curva. Sarà dunque y una certa funzione della x, diciamo

$$y=\varphi(x)$$

e la natura di questa funzione dipenderà dalla legge di generazione della curva e verrà precisata con essa.

La Geometria analitica rappresentando le curve mediante equazioni studia poi le proprietà delle curve sulla loro equazione, nella qual cosa i due problemi fondamentali da risolvere sono i seguenti:

1° Data un'equazione $f(x,y)=0$ descrivere la forma della curva che la rappresenta geometricamente.

2° Nota la legge di generazione di una curva;

trovarne l'equazione.

Abbiamo già dato al § prec: alcuni esempî più semplici di trattazione dell'uno e dell'altro problema ed alcuni altri ne daremo tra breve. Però diciamo subito che per risolvere questi problemi, particolarmente il primo, occorrono (salvo nei casi più semplici) risorse più elevate di quelle offerte dall'algebra.

Terminiamo queste prime generalità coll'osservare che ci siamo limitati fino ad ora a parlare delle equazioni della curva in coordinate Cartesiane; ma si può egualmente parlare dell'equazione di una curva in coordinate polari o bipolari o in qualunque altro sistema di coordinate.

Se per esempio si tratta di coordinate polari basta riferirsi alle formole (V) § 18

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

che legano le coordinate polari alle cartesiane ortogonali per vedere che qualunque equazione fra queste $f(x, y) = 0$ si traduce in una corrispondente equazione fra ρ, θ e inversamente.

§. 22.

Altro modo di definire analiticamente una curva.

Spesse volte in luogo di rappresentare analiticamente una curva mediante una equazione

$$f(x, y) = 0$$

fra le coordinate di un suo punto variabile è più opportuno esprimere le coordinate x, y del punto mobile sulla curva come funzioni di un parametro (variabile ausiliaria) t, siano

$$(21) \qquad x = f_1(t), \quad y = f_2(t);$$

eliminando il parametro t fra le due relazioni si ottiene l'equazione ordinaria della curva. Questo modo di rappresentare una curva si presenta molto naturalmente se si pensa la curva generata da un punto mobile secondo una determinata legge e si dà p. e. a $\underline{t}$ il significato del tempo impiegato dal punto mobile a pervenire da una posizione iniziale sulla curva alla attuale considerata. In ogni istante, cioè per ogni valore considerato di $\underline{t}$, il punto occuperà sulla curva una posizione determinata e sarà per ciò

tanto x quanto y una funzione di $\underline{t}$, ciò che è indicato nelle (21) coi simboli funzionali $f_1(t)$, $f_2(t)$.

In generale, qualunque sia il significato del parametro $\underline{t}$ nelle (21), ad ogni valore di $\underline{t}$, compreso nell'intervallo in cui sono definite le funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$, corrisponderà un punto $P \equiv (f_1(t), f_2(t))$, e se le funzioni f_1, f_2 sono continue, al variare continuo di $\underline{t}$ il punto P si muoverà nel piano descrivendo una curva.

<u>Esempio</u>. Riferiamo un circolo di raggio r a coordinate polari il cui polo sia nel centro; allora l'equazione del circolo è evidentemente $\rho = r$. Le coordinate ortogonali x, y di un punto del circolo sono quindi

(22) $$x = r\cos\theta \,,\quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

essendo θ l'anomalia variabile. Eliminando il parametro θ fra le (22) si ha l'equazione ordinaria del circolo

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Un'altra rappresentazione del circolo mediante formole della specie (21) otteniamo introducendo come nuovo parametro

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta;$$

si ha allora per note formole di trigonometria

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

e le formole

$$x = r\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = r\frac{2t}{1+t^2}$$

rappresentano quindi un circolo di raggio r.

§ 23

Esempî di curve (Sinusoide, cicloide)

Per illustrare le generalità di cui si è discorso nei due §§ precedenti prendiamo qualche altro esempio. Ed in primo luogo supposti gli assi Ox, Oy ortogonali cerchiamo di definire la forma della curva

$$y = \operatorname{sen} x$$

che dicesi sinusoide. La funzione $\operatorname{sen} x$, il cui modo di variazione è ben noto, ha il periodo 2π e basterà per ciò considerare il tratto della curva da $x=0$ ad $x=2\pi$; la curva si riproduce poi periodicamente nell'uno e nell'altro senso per tratti eguali che si ottengono dal primo per una traslazione nel senso dell'asse delle x d'ampiezza eguale ad un multiplo di 2π. Con-

siderando dapprima il tratto da $x=0$ a $x=\pi$; divideremo questo nei due intervalli da $x=0$ a $x=\frac{\pi}{2}$ e da $x=\frac{\pi}{2}$ a $x=\pi$. Siccome $sen(\pi-x)=sen\, x$ si vede che ottenuto il primo tratto della curva dal $x=0$ a $x=\frac{\pi}{2}$ basterà ribaltarlo attorno alla retta $x=\frac{\pi}{2}$ per avere il secondo tratto. Ora la funzione $y=sen\, x$ crescendo x da 0 a $\frac{\pi}{2}$ va continuamente crescendo da $\underline{0}$ a $\underline{1}$ e la curva partendo dall'origine O si reca per ordinate crescenti fino al punto $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1$ coll'andamento rappresentato schematicamente nella figura, il secondo tratto da $x=\frac{\pi}{2}$ o $x=\pi$ si ottiene poi dal primo nel modo anzidetto. La formola

$$sen(\pi+x)=-sen\, x$$

dimostra poi che il tratto della curva da $x=\pi$ a $x=2\pi$ si ottiene dal precedente (da $x=0$ a $x=\pi$) ribaltando questo attorno all'asse $\underline{x}$ e dandogli poi una traslazione di π lungo l'asse medesimo. Indi la curva si riproduce periodicamente come si è detto.

Per secondo esempio prendiamo la curva celebre nella storia delle matematiche, nota sotto il nome di <u>cicloide</u>; essa è il luogo descritto da un punto della circonferenza di un circolo che rotoli in un piano <u>senza</u> <u>strisciare</u> so-

pra una retta. La condizione che non vi sia strisciamento implica che ad ogni istante l'arco di circonferenza svolto sia uguale al tratto di retta percorso dal punto O di contatto. È evidente che si può anche considerare la curva come il luogo di un punto che percorre con moto uniforme la circonferenza di un cerchio trascinato nel piano in guisa che il suo centro percorra una retta con moto uniforme d'eguale velocità.

Tralasciando la condizione che i due moti abbiano eguale velocità, la curva descritta dal punto mobile dicesi una <u>cicloide accorciata</u> od <u>allungata</u> secondo che è maggiore la velocità del punto sulla circonferenza o quella del centro sulla retta; cicloide ordinaria nel caso di velocità eguali. Prendiamo la retta percorsa dal centro del circolo di raggio r per asse delle $\underline{x}$, l'asse delle y ortogonale a queste e supponiamo che quando il centro del circolo è nell'origine O il punto mobile M sulla circonferenza sia sull'asse delle $\underline{x}$ talchè le coordinate di questo punto iniziale A siano $x_0 = r$, $y_0 = 0$. Trascorso un tempo $\underline{t}$, l'anomalia

θ del punto mobile M sulla circonferenza, partendo da $\theta=0$ avrà acquistato il valore kt, la costante k rappresentando la velocità angolare ed essendo quindi: $v=kr$ la velocità lineare sulla circonferenza. Le coordinate ξ, η del punto riferito agli assi Ox, Oy trasportati col cerchio saranno quindi

$$\xi = r\cos kt, \quad \eta = r \operatorname{sen} kt.$$

Il centro O sarà intanto trasportato sull'asse delle x in O' percorrendo il tratto $OO'=k't$, indicando con k' la velocità di traslazione. Dunque, per le formole di traslazione degli assi, le coordinate x, y di M, riferite agli assi fissi Ox, Oy saranno

$$x = k't + r\cos kt, \quad y = r \operatorname{sen} kt.$$

Se si pone $kt=\theta$, $\frac{k'}{kr}=m$, le formole precedenti si scrivono

$$(23) \qquad x = r(m\theta + \cos\theta); \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Queste ci rappresentano analiticamente (§22) una cicloide e precisamente una cicloide ordinaria se $m=1$, allungata se $m>1$, accorciata se $m<1$.

L'equazione ordinaria della curva si ottiene eliminando θ fra le (23); essa si

scrive quindi

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{y}{r}\right) + \sqrt{r^2 - y^2}.$$

§ 24"

Curve algebriche e trascendenti

La rappresentazione analitica delle curve mediante la loro equazione in coordinate cartesiane

$$f(x, y) = 0$$

conduce ad una prima ed importante classificazione della curva in algebriche e trascendenti.

Una curva si dice algebrica quando la sua equazione in coordinate cartesiane è o si può ridurre ad essere un'equazione razionale intera nelle coordinate.

Qualunque curva che non sia algebrica si dice trascendente.

Quando parleremo della equazione

$$f(x, y) = 0 \tag{24}$$

di una curva algebrica intenderemo sempre che la funzione $f(x, y)$ sia razionale ed intera nelle due variabili x, y. Dicesi poi grado di una

curva algebrica il grado della funzione razionale $f(x,y)$. Si classificano quindi le curve algebriche a seconda del loro grado ed in generale cresce la difficoltà dello studio della curva al crescere del grado.

Che questa classificazione sia inerente alla natura stessa della curva risulta dall'osservare che: comunque si cambino gli assi coordinati il grado della curva non cangia. Sia infatti

$$(24) \qquad f(x,y)=0$$

l'equazione di grado m della curva riferita agli assi Ox, Oy. Il passaggio a nuovi assi $O'X$, $O'Y$ si fa mediante una sostituzione lineare (§16)

$$(25) \qquad \begin{cases} x = AX + BY + a \\ y = CX + DY + b \end{cases}$$

le A, B, C, D, a, b essendo costanti e la nuova equazione della curva si ottiene sostituendo nella $f(x,y)$ al posto di x, y i valori (25); essa è quindi

$$F(X,Y) = f(AX+BY+a,\ CX+DY+b) = 0$$

Ora come abbiamo visto al §16, la funzione $F(X,Y)$ ha ancora il grado m.

Per intendere il significato geometrico

del grado di una curva algebrica si osservi che se si cercano i punti comuni alla curva e ad una retta qualunque del piano, si potrà senza alterare la generalità supporre che questa retta sia p. e. l'asse delle x, giacchè un mutamento d'assi non fa cangiare il grado. Ora i punti dell'asse delle x avendo l'ordinata nulla, le ascisse dei punti cercati sono le radici della equazione

$$(26) \qquad f(x, 0) = 0$$

la quale è al massimo di grado m e non può quindi avere più di m radici. Con ciò abbiamo tacitamente supposto che la (26) risulti una vera equazione, non un'identità, nel quale ultimo caso tutti i punti dell'asse delle x appartengono alla linea $f(x, y) = 0$, che si scinde allora in questa retta e in una curva residua.

Ne concludiamo adunque: Una linea algebrica di grado m non può avere a comune con una retta del piano più di m punti, a meno che la retta non faccia parte della linea.

Questo significato geometrico del grado è ancora incompleto e lo potremo comples-

tare solo più tardi (cf § 84) colla nozione dei punti <u>immaginarii</u> delle curve; allora potremo dire: <u>Una curva algebrica (irriducibile) di grado m ha a comune con ogni retta del piano m punti fra reali e immaginarii</u>.

Intanto però ciò che abbiamo detto basta già per intendere la differenza essenziale geometrica fra le curve algebriche e le curve trascendenti. Le prime sono tagliate da ogni retta del piano in un numero <u>finito</u> di punti, le seconde invece <u>possono</u> avere a commune con una retta del piano infiniti punti.

Per applicare queste nozioni generali ci basteranno i pochi esempii addotti nei §§ precedenti. Il circolo e l'ellisse sono curve algebriche di <u>2° grado</u> e non possono essere tagliate da una retta in più di <u>due</u> punti.

La sinusoide e le cicloidi sono curve trascendenti e la loro forma periodica rende evidente che sono intersecate da rette p. e. parallele alla base e non troppo discoste da questa in infiniti punti.

La geometria analitica ordinaria non si occupa che delle curve algebriche, chè per lo studio delle trascendenti occorre il cal=

colo infinitesimale. Ed anzi nel nostro corso elementare, anche per le curve algebriche ci dovremo limitare allo studio di quelle dei due primi gradi. Come già abbiamo dimostrato al principio del § 20, le linee di 1° grado non sono altro che le rette; allo studio delle equazioni lineari dal punto di vista della geometria analitica dedichiamo il seguito del presente Capitolo. La curva di 2° grado o sezioni coniche occuperanno poi la seconda parte del corso.

§ 25.

Equazione della retta - Coefficiente angolare

Abbiamo già dimostrato al § 20 che:

a) Ogni equazione lineare $ax+by=0$ nelle coordinate cartesiane rappresenta una retta.

È facile anche vedere inversamente che ha luogo la proprietà:

b) Ogni retta ha un'equazione lineare

Nel modo più semplice lo dimostriamo cangiando gli assi coordinati in guisa che la retta supposta diventi il nuovo asse

delle X. Allora per tutti e soli i punti della retta sarà $Y=0$; ma poichè per le formole di trasformazione delle coordinate, Y è una funzione lineare intera di x, y, diciamo $Y = ax+by+c$, ne risulta la proprietà asserita.

Qui vogliamo, servendoci ancora del metodo della trasformazione delle coordinate, dare una nuova dimostrazione della proprietà a), la quale ha il vantaggio di far conoscere il significato dei coefficienti (o meglio dei rapporti dei coefficienti) nell'equazione della retta. Se l'equazione lineare

$$(16) \qquad ax+by+c=0$$

mancasse del termine in y, il luogo rappresentato sarebbe (come già si è osservato al principio del §20) una retta parallela all'asse delle y. Ora riduciamo il caso generale in cui nella (16) non manca la y a questo caso particolare operando una trasformazione di coordinate nel modo seguente. Prima di tutto scriviamo, come al §20, la (16) risoluta rispetto alla y sotto la forma

$$(16^*) \qquad y = mx+n,$$

che diciamo la forma ridotta dell'equazione della retta. Senza cangiare l'origine nè l'as-

se delle x, cangiando l'asse Oy nel nuovo OY lasciando per ora indeterminato l'angolo $\hat{xY} = \beta$.
Nelle formole generali (III) § 14 dovremo fare $\alpha = 0$, con che esse diventano

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{\operatorname{sen}(\omega - \beta)}{\operatorname{sen}\omega} Y \\ \\ y = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} Y. \end{cases}$$

La (16*) diventa quindi nelle nuove coordinate

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} Y = m\left(X + \frac{\operatorname{sen}(\omega - \beta)}{\operatorname{sen}\omega} Y\right) + n;$$

se adunque potremo scegliere l'angolo β in guisa che sia

(27) $\operatorname{sen}\beta = m \operatorname{sen}(\omega - \beta)$,

sparirà dalla nuova equazione la Y e il luogo rappresentato sarà quindi una retta parallela al nuovo asse OY.

Ma dalla (27) sviluppando il secondo membro si trae

$$\operatorname{sen}\beta = m[\operatorname{sen}\omega \cos\beta - \cos\omega \operatorname{sen}\beta]$$

e dividendo per $\cos\beta$ e risolvendo rispetto a $\operatorname{tg}\beta$

(28) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m \operatorname{sen}\omega}{1 + m\cos\omega}$.

L'angolo β essendo dato per la sua tangente abbiamo un valore β_0 di β fra 0 e π che vi soddisfa e tutti gli altri sono dati da

$$\beta = \beta_0 + n\pi \quad (n \text{ intero})$$

Così non solo abbiamo dimostrato la proprietà a) ma di più abbiamo trovato la formola (28) che assegna il valore dell'inclinazione β_0 della retta rappresentata sull'asse delle x. Il valore di $tg\,\beta$ dipende nella (28) unicamente dal primo coefficiente m della equazione (16*) della retta e nulla affatto dal secondo. Per questa ragione m dicesi il coefficiente angolare della retta perchè da esso soltanto dipende la direzione della retta. Si osservi che la (27) ci dà

$$m = \frac{sen\,\beta}{sen(\omega - \beta)} = \frac{sen(\widehat{xr})}{sen(\widehat{ry})},$$

indicando con r la direzione della retta ed assegna il significato del coefficiente angolare m come il rapporto dei seni degli angoli in cui una parallela alla retta tirata per l'origine divide l'angolo degli assi. Notevole è il caso degli assi ortogonali, ove essendo $\omega = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$m = tg\,\beta;$$

dunque: se gli assi sono ortogonali il coefficiente angolare di una retta è uguale alla tangente

trigonometrica dell'angolo d'inclinazione della retta sull'asse delle x.

Da quello che abbiamo detto sul significato di m risulta: Affinchè due rette siano parallele è necessario e sufficiente che abbiano eguali coefficienti angolari.

Notiamo poi che quando l'equazione della retta è data sotto la forma generale

$$ax+by+c=0$$

il valore del coefficiente angolare è:

$$m=-\frac{a}{b}$$

ne risulta: Due equazioni lineari

$$ax+by+c=0$$
$$a'x+b'y+c'=0$$

rappresentano rette parallele allora ed allora soltanto quando sussiste la proporzione $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, ossia quando si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b.$$

E' da notarsi che sotto quest'ultima forma non fa difetto nemmeno il caso di rette parallele all'asse delle y; allora $b=b'=0$ ed il coefficiente angolare comune ha il valore ∞.

Infine per stabilire il significato del

secondo coefficiente n nell'equazione ridotta della retta basta semplicemente osservare che per $x=0$ la (16*) dà $y=n$, onde il punto $(0,n)$ appartiene alla retta. Dunque: il secondo coefficiente n nell'equazione ridotta $y=mx+n$ della retta rappresenta l'ordinata del punto ove la retta incontra l'asse delle y.

Di qui si ricava subito: La condizione necessaria e sufficiente affinchè due equazioni lineari $ax+by+c=0$, $a'x+b'x+c'=0$ rappresentino la stessa retta è che sussista la proporzione

$$a:b:c=a':b':c',$$

ossia che si annullino i tre minori di 2° ordine nella matrice $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}$.

§ 26
Punti d'incontro di due rette

Il problema: Trovare le coordinate del punto d'incontro di due rette date mediante le loro equazioni

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

non è altro che il problema dell'algebra elementare della risoluzione di due equazioni lineari a due incognite, poichè le coordinate del punto comune debbono soddisfare l'una e l'altra equazione. Qui troviamo la rappresentazione geometrica dei tre casi che si distinguono nell'algebra elementare nella risoluzione di un tale sistema.

<u>1° caso</u>. Se il determinante $ab'-a'b$ non è nullo le rette non sono parallele (§ prec.) e per le coordinate del punto comune si hanno i valori determinati e finiti

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\,,\quad y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\,.$$

Questo è il caso generale dell'algebra (equazioni compatibili e distinte)

<u>2° caso</u>. Se è nullo il determinante denominatore $ab'-a'b$ ma non insieme i due numeratori $bc'-b'c$, $a'c-ac'$, le due rette sono parallele ma non coincidenti. Esse non hanno alcun punto comune (a distanza finita): è il caso d'<u>incompatibilità</u> dell'algebra.

<u>3° caso</u>. Se sono nulli insieme numeratori e denominatore delle formole di risoluzione le due rette coincidono ed abbiamo infinite soluzio-

ni: è il caso d'indeterminazione.

Per trovare il punto d'incontro di due rette r, r' possiamo far uso di un secondo metodo molto importante perchè si estende poi alla ricerca dei punti d'incontro di una retta con una curva (algebrica) qualunque.

Pensiamo perciò data una delle due rette r mediante la sua equazione

$$r) \qquad ax+by+c=0$$

e la seconda retta come congiungente due suoi punti P_1, P_2 di determinate coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2). Il punto P ove la retta P_1P_2 incontra la retta r dividerà il segmento P_1P_2 in un certo rapporto (incognito) $\frac{m}{n}$. Noto questo, le coordinate x, y di P saranno

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n};$$

dovendo queste soddisfare l'equazione della retta r, sostituendo e moltiplicando per $m+n$ troviamo per determinare il rapporto incognito $\frac{m}{n}$:

$$m(ax_2+by_2+c)+n(ax_1+by_1+c)=0,$$

onde

$$(29) \qquad \frac{m}{n}=-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}.$$

Così è risoluto in un nuovo modo il

problema e da questa formola (29) di risoluzione si traggono le seguenti importanti conclusioni. I due trinomii

$$ax_1+by_1+c, \quad ax_2+by_2+c$$

avranno lo stesso segno o segno contrario (1): nel primo caso la (29) assegna ad $\frac{m}{n}$ un valore negativo quindi P è esterno al segmento P_1P_2 (§2), nel secondo caso invece $\frac{m}{n}$ è positivo e quindi P è fra P_1 e P_2. Ciò equivale a dire che nel primo caso P_1, P_2 si trovano da una stessa parte della retta $ax+by+c=0$, nel secondo da parti opposte. Abbiamo dunque trovato la seguente regola importante:

Per riconoscere se due punti $P_1 \equiv (x_1\ y_1)$ $P_2 \equiv (x_2\ y_2)$ sono dalla stessa banda o da bande opposte di una retta di equazione

$$ax+by+c=0,$$

si sostituiscono nel primo membro dell'equazione della retta al posto di x, y una prima volta le coordinate di P_1, una seconda volta quelle di P_2; si presenterà il primo caso se i

(1) Escludiamo il caso che uno di essi si annulli perchè allora già P_1 e P_2 sarebbe su r ed il punto P coinciderebbe con esso.

due trinomii risultanti

$$ax_1+by_1+c\,,\quad ax_2+by_2+c$$

hanno lo stesso segno, il secondo se hanno segno contrario.

Possiamo enunciare questo risultato sotto altra forma così: La funzione lineare $ax+by+c$ ha in ogni punto del piano un determinato valore; essa si annulla lungo una retta r che divide il piano in due regioni. In una di queste regioni la funzione $ax+by+c$ è costantemente positiva, nell'opposta sempre negativa.

Dalla (29) possiamo anche riconoscere se la congiungente P_1P_2 è parallela alla retta $ax+by+c=0$, ciò avverrà quando ne risulti $\frac{m}{n}=-1$ (§2), ossia per la (29) quando

$$ax_2+by_2+c=ax_1+by_1+c.$$

Di qui si trae

$$-\frac{a}{b}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

e poichè $-\frac{a}{b}$ è il coefficiente angolare della retta r e quindi della sua parallela P_1P_2, ne deduciamo: Il coefficiente angolare della retta congiungente due punti è uguale al rapporto fra le differenze delle ordinate e la differenza

delle ascisse dei punti.

§ 27.

Equazione della retta per due punti - Forma $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ dell'equazione della retta.

Tre punti $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ non sono in generale in linea retta. Perchè ciò avvenga è evidentemente necessario e sufficiente che esista un'equazione lineare

$$ax+by+c=0$$

a cui soddisfano tutte tre le coppie di coordinate, cioè che si possono prendere le tre incognite a, b, c non tutte nulle in guisa da soddisfare le tre equazioni lineari omogenee

$$ax_1+by_1+c=0$$
$$ax_2+by_2+c=0$$
$$ax_3+by_3+c=0.$$

L'algebra ci insegna essere perciò necessario e sufficiente che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dunque: Condizione necessaria e sufficiente perchè tre punti $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ siano in linea retta è che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Dopo ciò possiamo subito risolvere il problema di scrivere l'equazione della retta che congiunge due punti $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$. Basta per ciò pensare il terzo punto $(x_3 y_3)$ variabile ed indicare quindi le sue coordinate col simbolo delle coordinate correnti (variabili) x y. Così:

L'equazione della retta che congiunge i due punti $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ è data da

---

(1) La stessa cosa si dimostra anche subito così: Se i tre punti sono in linea retta si avrà

$$x_3 = \frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \quad y_3 = \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}$$

onde moltiplicando la prima linea del determinante per $\frac{n}{m+n}$ la seconda per $\frac{m}{m+n}$ e sottraendo dalla terza, si vede subito che è nullo il determinante. Viceversa se questo è nullo si può determinare il rapporto $\frac{m}{n}$ per guisa che abbiano luogo le formole superiori.

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Del resto una volta scritta quest'equazione si verifica subito che essa rappresenta in effetto la retta domandata. Come equazione lineare essa rappresenta infatti una retta; di più essa è verificata sia da $x = x_1$, $y = y_1$ sia da $x = x_2$, $y = y_2$ il determinante che ne risulta nel primo membro essendo nullo perchè con due linee eguali. Notiamo poi che dalla forma (30) dell'equazione della congiungente dei punti si trae di nuovo il teorema alla fine del § precedente.

Possiamo applicare la formola (30) alla ricerca di una forma dell'equazione della retta spesso usata. Supponiamo che la retta non passi per l'origine nè sia parallela ad uno degli assi, siano p, q i valori (algebrici) dei segmenti che la retta stacca sugli assi a partire dall'origine. Essa incontra quindi l'asse delle x nel punto $(p, 0)$ e quello delle y nel punto $(0, q)$; dunque la sua equazione per la (30) è

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero sviluppando

$$qx + py = pq$$

e dividendo per pq

$$(31) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 .$$

È questa la forma semplice cercata dell'equazione della retta che pone in evidenza i segmenti p, q staccati dalla retta sugli assi coordinati.

§ 28"
Area del triangolo

La condizione perchè tre punti

$$P_1 \equiv (x_1 y_1), P_2 \equiv (x_2 y_2), P_3 \equiv (x_3 y_3)$$

siano in linea retta si è espressa sopra coll'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Quando questo determinante non è nullo i tre punti P_1, P_2, P_3 non essendo allineati,

sono i vertici di un triangolo $P_1P_2P_3$ che avrà una certa area; noi vogliamo ora dimostrare che il valore del determinante scritto sta in una relazione semplicissima colla misura dell'area del triangolo. Per questo, sottraendo nel determinante la prima linea dalla seconda e dalla terza, cominciamo dal ridurlo al determinante di 2° ordine

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Facciamo poi una trasformazione di assi prendendo per origine O' dei nuovi assi $O'X$, $O'Y$ il punto $P_1\equiv(x_1,y_1)$, per asse delle X la retta P_1P_2 diretta positivamente da P_1 verso P_2, e l'asse delle Y normale all'asse delle X colla consueta giacitura ($\omega'=X\hat{Y}=\frac{\pi}{2}$). Se (X_1Y_1), (X_2Y_2), (X_3Y_3) sono le nuove coordinate di P_1, P_2, P_3 avremo evidentemente

$$X_1=0\ ,\quad Y_1=0$$
$$X_2>0\ ,\quad Y_2=0.$$

Ora le formole generali di trasformazione degli assi (§16) ci danno:

$$(33) \qquad \begin{cases} x=AX+BY+x_1 \\ y=CX+DY+y_1\ , \end{cases}$$

dove non importerà precisare i valori delle co-

stanti A, B, C, D ma solo ricordare che, a causa della formola (10^*) §14, si ha

$$(34) \qquad AD - BC = \frac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} .$$

Applicando le (33) ai punti P_2, P_3, abbiamo

$$x_2 - x_1 = A X_2 \quad , \quad y_2 - y_1 = C X_2$$
$$x_3 - x_1 = A X_3 + B Y_3 \; , \quad y_3 - y_1 = C X_3 + D Y_3 \; ;$$

sostituendo nel determinante (32) risulta

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (AD - BC) X_2 Y_3 ,$$

cioè per la (34)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{X_2 Y_3}{\operatorname{sen} \omega} .$$

Ma nel triangolo $P_1 P_2 P_3$ il lato $P_1 P_2$, considerato come base, ha appunto la <u>lunghezza</u> X_2 (si ricordi che $X_2 > 0$) mentre Y_3 dà in valore assoluto l'altezza relativa. Osserviamo ora che se $Y_3 > 0$ ciò significa che il punto P_3 trovasi alla sinistra di un osservatore che collocato in P_1, sulla pagina positiva del piano, guardi verso P_2; quando $Y_3 < 0$ accadrà invece il contrario. Nel primo caso rispetto ad un osservatore che percorra il perimetro del triangolo

nel senso $P_1 P_2 P_3$ l'area interna del triangolo re sta alla sinistra, nel secondo alla destra. E se conveniamo di considerare l'area come positiva nel primo caso, come negativa nel secondo e indichiamo con Δ il valore algebrico dell'area del triangolo, avremo

$$X_2 Y_3 = 2\Delta$$

L'ultima formola dà quindi la formola finale cercata

$$(35) \qquad \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \operatorname{sen} \omega,$$

dove ricordiamo che ω significa l'angolo $\hat{xy}$ degli assi. Questa formola (35) risolve il problema: Conoscendo le coordinate dei tre vertici di un triangolo, calcolarne l'area; anzi essa dà non soltanto il valore assoluto ma bensì anche il valore algebrico dell'area, secondo le convenzioni superiori.

Nel caso di assi ortogonali $\omega = \frac{\pi}{2}$ si ha il semplicissimo risultato:

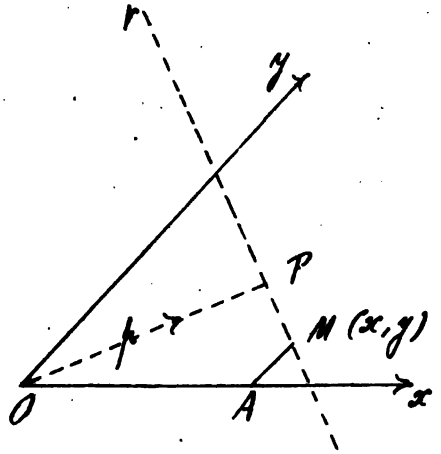
Il determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, se gli assi sono ortogonali, dà il doppio dell'area del trian-

goli coi vertici nei tre punti $(x_1 y_1)$; $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$.

§29.

Forma normale dell'equazione della retta - Equazione polare.

Vi ha una forma particolarmente importante dell'equazione della retta, la così detta forma normale, della quale andiamo ora a trattare e in pari tempo verremo a dare una nuova dimostrazione del teorema che ogni retta ha un'equazione lineare e viceversa. Consideriamo una retta r qualunque



nel piano, caliamo dall'origine O sulla retta r la perpendicolare OP, che assumiamo diretta positivamente da O verso P ed indichiamo con p la distanza (positiva) dell'origine dalla retta che è altresì il valore algebrico del segmento $\overline{OP}$. Se poniamo poi l'angolo

$$\hat{xp} = \alpha$$

è chiaro che i valori di p e di α fisseranno

perfettamente la posizione della retta r nel piano. Per simmetria introdurremo anche un secondo angolo

$$\hat{yp} = \beta$$

che sarà legato ad α ed all'angolo $\omega = \hat{xy}$ degli assi dalla relazione

$$\alpha - \beta \equiv \omega.$$

Brevemente saranno così p la distanza della retta dall'origine α, β gli angoli formati dagli assi colla perpendicolare calata dall'origine verso la retta. È da osservarsi per altro che quando la retta passi per l'origine O la nostra convenzione non viene più a fissare la direzione positiva della normale alla retta, che si potrà prendere rivolta a piacere in uno dei due versi.

Ciò posto consideriamo sulla retta r un punto qualunque $M \equiv (x, y)$ e tirando per M la parallela MA ad Oy fino all'incontro in A con Ox, formiamo la solita spezzata OAM tale che $\overline{OA} = x$, $\overline{AM} = y$ e projettiamo la spezzata e la sua risultante OM sulla direzione OP. Applicando il teorema C) § 13 delle projezioni, ne deduciamo

$$(36) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta = p.$$

Così ogni punto della retta soddisfa colle sue coordinate a questa equazione lineare; e viceversa ogni punto M che vi soddisfa è nella retta, giacchè la (36) esprime che la proiezione di M sulla direzione OP cade in P. La (36) dicesi appunto l'<u>equazione normale</u> della retta.

Quando gli assi sono ortogonali, essendo $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, indi $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, l'equazione normale prende la forma più semplice

$$(36^*) \qquad x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = p.$$

Di qui possiamo subito dedurre l'equazione della retta in coordinate polari ρ, θ. Basta per ciò porre nella (36*)

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

onde si vede che: <u>L'equazione della retta in coordinate polari si scrive</u>

$$(A) \qquad \rho\cos(\theta - \alpha) = p,$$

<u>dove p, α sono due costanti delle quali la prima dà la distanza della retta dall'origine, la seconda α l'angolo che la normale calata dall'origine forma coll'asse polare.</u>

§ 30.
Riduzione a forma normale

Una qualunque equazione lineare

$$(37) \qquad ax + by + c = 0$$

rappresenta una retta; questa va d'altronde anche un'equazione normale (36).

Importa trovare le formole di riduzione della equazione generale (37) alla forma normale o in altre parole risolvere il problema: <u>Data l'equazione (37) di una retta, calcolare la distanza p della retta dall'origine e gli angoli che la perpendicolare calcolata dall'origine forma cogli assi.</u>

Perchè le equazioni (36), (37) rappresentino la stessa retta occorre che i loro coefficienti siano proporzionale, che si abbia cioè

$$(38) \qquad a = k\cos\alpha, \quad b = k\cos\beta, \quad c = -kp,$$

essendo k un fattore di proporzionalità, di cui abbiamo soltanto determinare il valore.
Ma essendo

$$\alpha - \beta \equiv \omega,$$

ne segue l'identità trigonometrica

$$\operatorname{sen}^2\omega = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha -$$
$$- 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= \cos^2\beta(2-\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \cos^2\alpha + \cos\beta - 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta),$$

e infine

$$\operatorname{sen}^2\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega.$$

Moltiplicando questa per k^2 ed osservando le (38) abbiamo

$$k^2\operatorname{sen}^2\omega = a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega,$$

dunque

$$k = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Dopo ciò le (38) diventono

$$(39)\begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{a\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}, \quad \cos\beta = \pm\dfrac{b\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}} \\ p = \mp\dfrac{c\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}. \end{cases}$$

Così è determinata k a meno del segno e per fissare anche questo basta osservare che, per la nostra convenzione, deve essere p positivo. Nella terza delle formole superiori bisogna dunque adottare il segno superiore o l'inferiore secondo che il prodotto $c\operatorname{sen}\omega$ è negativo o positivo, e siccome nelle (39) valgono insieme i segni superiori o gli inferiori così tutto resta fissato in queste formole.

Ciò che abbiamo ora detto rispetto alla determinazione dei segni cade in difetto se $c \operatorname{sen} \omega = 0$ e quindi $c = 0$; ma allora la retta $ax + by = 0$ passa per l'origine e, come già abbiamo avvertito al § prec., la nostra convenzione non fissa più la direzione positiva della normale.

Riassumendo possiamo enunciare la regola: Per ridurre l'equazione $ax + by + c = 0$ a forma normale basta moltiplicarne il primo membro per $\pm \dfrac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}}$, essendo ω l'angolo degli assi. In particolare per assi ortogonali basta dividerla per $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

§ 31.

Distanza di un punto da una retta

La terza delle formole (39) esprime pei coefficienti a, b, c dell'equazione della retta la distanza dell'origine dalla retta. Dopo ciò si può facilmente risolvere il problema: Data l'equazione $ax + by + c = 0$ di una retta e le coordinate x_1, y_1 di un punto P_1, calcolare la distanza δ del punto dalla retta.

Con una traslazione degli assi traspor-

tiamo l'origine da O in $P_1 \equiv (x_1 y_1)$; per le formole di trasformazione

$$x = X + x_1 \quad , \quad y = Y + y_1$$

la nuova equazione della retta sarà

$$aX + bY + (ax_1 + by_1 + c) = 0$$

e differirà dalla primitiva solo pel nuovo termine noto $c_1 = ax_1 + by_1 + c$. Per la terza delle (39) avremo dunque

$$\delta = \pm \frac{(ax_1 + by_1 + c).\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}.$$

Qui siccome per ora a δ attribuiamo solo un segno positivo, converrà adottare nel secondo membro quel segno che lo rende positivo. Se però paragoniamo le distanze di diversi punti dalla medesima retta non converrà più attribuire a queste distanze solo un valore assoluto, ma sarà invece opportuno assumerle positive o negative secondo che i punti si trovano da una parte o dall'altra della retta. Se ricordiamo dal §27 che per due punti $(x_1 y_1), (x_2 y_2)$ i due trinomii

$$ax_1 + by_1 + c \,,\quad ax_2 + by_2 + c$$

hanno segno uguale o contrario secondo che i due punti sono da una stessa parte o da parte opposta della retta, vediamo che lo stesso accade delle due espressioni

$$\frac{(ax_1+by_1)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}\,,\quad \frac{(ax_2+by_2+c)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}\,.$$

Per ciò colla nuova convenzione rispetto ai segni dalle distanze dei punti dalla retta potremo scrivere la nostra formola così

$$(40)\qquad \delta=\frac{(ax_1+by_1+c)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}$$

intendendo pel segno $\sqrt{\ }$ il valore positivo del radicale. Con questo alla distanza δ verrà attribuito anche un segno e questo ci dirà se il punto trovasi nell'una o nell'altra delle due regioni in cui la retta divide il piano. La formola (40) è di uso frequentissimo specialmente per assi ortogonali. In parole essa si enuncia colla regola:

Supposti gli assi ortogonali, per avere la distanza di un punto $(x_1 y_1)$ dalla retta di equazione $ax+by+c=0$, basta sostituire nel primo membro dell'equazione della retta le coordinate del punto e dividere il resultato ax_1+by_1+c per $\sqrt{a^2+b^2}$.

In particolare si osservi che se l'equazione della retta ha la forma normale

$$p-x\cos\alpha-y\,\mathrm{sen}\,\alpha=0$$

il valore algebrico della distanza del punto $(x_1 y_1)$ della retta è semplicemente

$$p-x_1\cos\alpha-y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,$$

computata come positiva (= p) la distanza dell'origine dalla retta.

§ 32.

Angolo di due rette

Date due rette mediante le loro equazioni

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0,$$

proponiamoci di trovare l'angolo che esse formano fra loro. Per misurare questo angolo θ senza ambiguità caliamo dall'origine le perpendicolari p, p' alle due rette, volte al solito dall'origine verso le rette e poniamo

$$x\hat{p} = \alpha, \quad x\hat{p}' = \alpha', \quad p\hat{p}' = \theta,$$

sarà appunto θ uno degli angoli delle due rette ed avremo:

$$\theta \equiv x\hat{p}' - x\hat{p} \equiv \alpha' - \alpha.$$

Cerchiamo dapprima le formole che danno $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ supposti gli assi ortogonali, poi ne dedurremo le formole generali per assi obliqui applicando le formole di trasformazione delle coordinate.

Se gli assi sono ortogonali si avrà per le (39)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

dove i radicali avranno un segno determinato p. e. il positivo se supponiamo, come è lecito, scritte le equazioni delle due rette in guisa che i termini noti c, c' risultino negativi.

Abbiamo:

$$\cos\theta = \cos(\alpha'-\alpha) = \cos\alpha'\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'$$

indi per le precedenti

$$(41) \quad \cos\theta = \frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

alle quali possiamo aggiungere l'altra

$$(41^*) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{ab'-a'b}{aa'-bb'}.$$

Supposti ora in generale gli assi Ox, Oy obliqui, riduciamoli ad assi ortogonali OX, OY colla stessa origine mediante le formole (13) del § 15

$$\begin{cases} x = X - \cot\omega\, Y \\ y = \dfrac{Y}{\operatorname{sen}\omega}. \end{cases}$$

Le equazioni $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ del

le due rette in assi obliqui si trasformeranno nei nuovi assi ortogonali nelle altre

$$AX+BY+C=0$$
$$A'X+B'Y+C'=0$$

con

$$A=a\,\mathrm{sen}\,\omega\,,\quad B=b-a\cos\omega\,,\quad C=c\,\mathrm{sen}\,\omega$$
$$A'=a'\mathrm{sen}\,\omega\,,\quad B'=b'-a'\cos\omega\,,\quad C'=c'\mathrm{sen}\,\omega\,.$$

Si potranno quindi applicare le (41) sostituendo ad $a, b\,;\, a', b'$ rispettivamente $A, B\,;\, A', B'$.

Si ottengono così le formole generali richieste:

$$(42)\qquad \cos\theta=\frac{aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\omega}}\,,\quad \mathrm{sen}\,\theta=\frac{(ab'-a'b)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\omega}}$$

$$(42^*)\qquad \mathrm{tg}\,\theta=\frac{(ab'-a'b)\,\mathrm{sen}\,\omega}{aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\omega}\,.\ (1)$$

Dividendo nelle (42) numeratore e denominatore dei secondi membri per bb' vengono ad introdursi i coefficienti angolari m, m' delle due rette e si ha:

---

(1) Manifestamente quando si volesse conoscere soltanto l'angolo acuto formato, nel senso elementare, dalle due rette basterebbe prendere nei secondi membri di queste formole i valori assoluti.

$$(43)\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{mm'+1+(m+m')\cos\omega}{\sqrt{m^2+1+2m\cos\omega}\sqrt{m'^2+1+2m'\cos\omega}} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{(m'-m)\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{m^2+1+2m\cos\omega}\sqrt{m'^2+1+2m'\cos\omega}} \end{cases}$$

Da queste formole deduciamo le condizioni per il parallelismo o la perpendicolarità delle due rette. Nel primo caso deve essere

$$\theta = 0,\quad \theta = \pi,\quad \text{cioè } \operatorname{sen}\theta = 0$$

e nel secondo

$$\theta = \frac{\pi}{2},\quad \theta = \frac{3\pi}{2},\quad \text{cioè } \cos\theta = 0.$$

Dunque si ha

$$(44)\qquad ab'-a'b=0 \quad \text{o} \quad m'=m$$

come condizione di parallelismo, ciò che avemmo già visto al § 25 ed invece

$$(45)\qquad aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\omega = 0$$

ovvero

$$(45^*)\qquad mm'+1+(m+m')\cos\omega = 0$$

per la condizione d'ortogonalità. Se gli assi stessi sono ortogonali quest'ultima condizione assume la forma più semplice

$$(46)\qquad aa'+bb' = 0$$

ovvero:

$$(46^*)\qquad mm'+1=0.$$

Dell'ultima formola ricorrendo più

frequentemente l'uso enunciandola esplicitamente in parole: Se gli assi sono ortogonali la condizione necessaria e sufficiente affinchè due rette di coefficienti angolari m, m' siano perpendicolari fra loro è che il prodotto di questi coefficienti angolari sia eguale all'unità negativa.

"§ 33"

Fascio di rette

Date tre rette mediante le loro equazioni

$$(47) \qquad \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \\ a''x+b''y+c''=0, \end{cases}$$

esse non appartengono in generale ad un fascio, cioè non hanno un punto comune a distanza finita o all'infinito. Cerchiamo la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada. Se le tre rette hanno un punto comune a distanza finita, le coordinate di questo soddisfano tutte tre le equazioni e si annulla quindi il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Lo stesso accade se le tre rette sono parallele perchè allora si hanno le proporzioni

$$a : a' : a'' = b : b' : b''$$

e il determinante avendo due colonne proporzionali si annulla.

Viceversa, pei noti teoremi dell'algebra sui sistemi lineari, se si annulla il determinante e non tutti tre i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix}$$

esistono valori determinati e finiti di x, y che verificano tutte tre le (47) e per ciò le tre rette hanno a comune un punto a distanza finita. Se poi insieme al determinante si annullano i tre detti minori le tre rette sono parallele ed appartengono ancora ad un fascio. Concludiamo adunque:

<u>Condizione necessaria e sufficiente affinchè le tre rette</u>

$$ax + by + c = 0 \;,\; a'x + b'y + c' = 0 ,\; a''x + b''y + c'' = 0$$

<u>appartengano ad un fascio è che si annulli il determinante dei loro coefficienti</u>

$$(48) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

In altro modo si può esprimere questa condizione ricordando dall'algebra che cosa esprime altresì essere una delle tre equazioni (47) una conseguenza delle altre due, il che significa che, supposte p. e. le due prime rette distinte, possiamo trovare due moltiplicatori λ, μ tali che si abbia identicamente

$$a''x+b''y+c'' = \lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')$$

cioè tali da soddisfare le tre equazioni

$$(49) \qquad \begin{cases} a'' = \lambda a + \mu a' \\ b'' = \lambda b + \mu b' \\ c'' = \lambda c + \mu c'. \end{cases}$$ [1]

---

(1) Direttamente si dimostra così. Le due prime rette essendo distinte uno almeno dei tre minori della matrice $\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|$ non è nullo; poniamo p. e. sia $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$. Allora le due seconde equazioni (49) determinano valori finiti per λ, μ che soddisfano anche la terza perchè

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a''-\lambda a-\mu a' & b''-\lambda b-\mu b' & c''-\lambda c-\mu c' \end{vmatrix} =$$

$$= (a''-\lambda a'-\mu a') \times \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

ed è quindi $a'' = \lambda a + \mu a'$ c. d. d.

Possiamo enunciare questo risultato sotto la forma equivalente: Date le equazioni di due rette distinte

$$ax+by+c=0 \quad , \quad a'x+b'y+c'=0$$

l'equazione di una retta mobile nel fascio determinato da queste due si scrive

$$(50) \qquad \lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$$

rimanendo arbitrarie le costanti λ, μ o meglio il loro rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.

È bene osservare che a questo risultato si giunge anche con un semplice ragionamento, il quale si applica in casi superiori (per fasci di curve). Che la (50) rappresenta per qualsiasi valore del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ una retta del fascio determinato dalle due fondamentali, si vede osservando che se queste due rette hanno un punto comune a distanza finita, le coordinate di questo annullano ciascuno dei trinomii $ax+by+c$, $a'x+b'y+c$ e quindi anche il 1° membro della (50); se sono poi parallele allora è

$$a:b=a':b'$$

e quindi anche

$$a:b=\lambda a+\mu a':\lambda b+\mu b'.$$

Inversamente la (50) rappresenta qualunque retta del fascio perchè, disponendo del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ si

può far passare la retta (50) per qualunque punto del piano.

Si osserverà che si ottengono in particolare le due rette fondamentali

$$ax+by+c=0, \quad a'x+b'y+c'=0$$

del fascio dalla (50) facendo per la prima

$$\lambda=1; \quad \mu=0, \quad o \quad \frac{\lambda}{\mu}=\infty$$

e per la seconda

$$\lambda=0, \quad \mu=1, \quad o \quad \frac{\lambda}{\mu}=0.$$

Infine notiamo che se il centro del fascio è un punto a distanza finita $(x_1 y_1)$ due particolari rette del fascio sono

$$x-x_1=0, \quad y-y_1=0$$

e quindi l'equazione di ogni altra retta del fascio si scrive

$$\lambda(x-x_1)+\mu(y-y_1)=0$$

ovvero, ponendo in evidenza il coefficiente angolare (variabile)

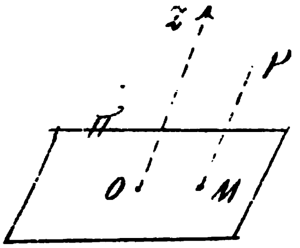
$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Capitolo 4°

Coordinate nello spazio punteggiato

§ 34.
Coordinate cartesiane nello spazio

Per determinare la posizione di un punto qualunque P nello spazio cominciamo dal fissare



un piano arbitrario π ed una retta Oz la quale esca da un punto O di π senza giacere in questo piano; fissiamo inoltre sulla retta Oz un determinato verso come positivo. Per il punto P arbitrario dello spazio tiriamo la parallela PM ad Oz fino all'incontro in M con π. Sarebbe nota la posizione di P nello spazio se conosciamo

1° la posizione di M sopra π

2° la posizione di P sulla parallela MP ad Oz.

Il primo elemento si può fissare scegliendo ad arbitrio in π due assi cartesiani ai quali si riferiscono i punti di π. Per semplicità si prende l'origine di questi assi precisamente nel punto O

O dove la Oz interseca π; così il punto M è fissato dai valori x, y delle sue coordinate.

Quanto alla posizione di P sopra MP sarà fissata quando si conosca il valore algebrico del segmento $\overline{MP}$, che si indicherà con z:

$$\overline{MP} = z$$

e sarà l'ascissa di P sopra questa parallela ove si assuma il punto M come origine e per verso positivo quello di Oz.

La posizione del punto P nello spazio sarà dunque fissata quando siano dati i valori dei tre numeri

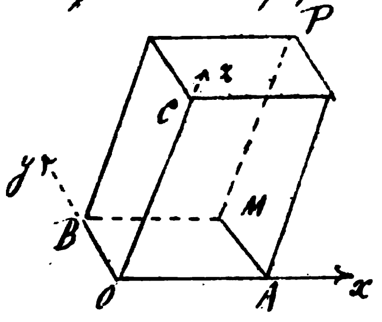
$$x, y, z.$$

Questi si dicono le coordinate cartesiane del punto P e si scrive $P \equiv (x, y, z)$. Si vede subito che abbiamo così fissata una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio e le terne di valori (x, y, z) delle tre variabili indipendenti x, y, z. Per questa ragione lo spazio punteggiato (luogo dei suoi punti) è da riguardarsi come un ente geometrico a tre dimensioni e come una forma geometrica (fondamentale) di 3.^{a} specie.

Le denominazioni che si usano per lo spazio sono analoghe a quelle già fissate pel piano. Le tre rette Ox, Oy, Oz (fissate anche in verso

positivo) diconsi i tre assi coordinati, il punto O l'origine ed i piani Oxy, Oxz, Oyz i tre piani coordinati. Le tre direzioni positive degli assi determinano un triedro che dicesi brevemente il *triedro coordinato*; le sue faccie sono i piani coordinati.

Se per il punto P si conducono i tre piani paralleli ai tre piani coordinati, si forma un parallelepipedo di cui l'origine O e il punto P sono vertici opposti; e se con A, B, C si indicano i vertici di questo parallelepipedo (oltre O) situati sugli assi Ox, Oy, Oz si vede subito che si ha in grandezza e segno



$$\overline{OA}=x,\quad \overline{OB}=y,\quad \overline{OC}=z.$$

In questo modo appare la perfetta simmetria nella definizione delle tre coordinate di un punto.

Osserviamo che i tre piani coordinati indefiniti dividono lo spazio in 8 regioni, triedri, ciascuno dei quali ha i tre spigoli sugli assi nel verso positivo o negativo di ciascuno di questi. Secondo che il punto trovasi nell'una o nell'altra delle 8 regioni le sue coordinate offrono l'una o

l'altra delle 8 successioni di segni

x	y	z	
+	+	+	(triedro principale)
+	+	−	
+	−	+	
−	+	+	
+	−	−	
−	+	−	
−	−	+	
−	−	−	

Ancora è da notare che se una delle coordinate è nulla il punto si trova sul piano degli altri due assi; così p. e. $z = 0$ per ogni punto del piano xy. Se si annullano due delle coordinate del punto il punto è sul terzo asse; così se $y = z = 0$ il punto è sull'asse delle x. In fine se tutte tre le coordinate sono nulle il punto è nell'origine O (punto zero).

Per le applicazioni che dovremo fare nel seguito della teoria delle projezioni è importante poi l'osservazione seguente. Tiriamo per P la parallela ad Oz fino all'incontro in M col piano xy, per M (nel piano xy) la parallela all'asse Oy fino all'incontro in A coll'asse delle x: <u>La spezzata $OAMP$ che dall'origine conduce al punto</u>

P è formata dai tre segmenti $\overline{OA}$, $\overline{AM}$, $\overline{MP}$ che sono in grandezza e segno ordinatamente le x, y, z del punto P.

Come nella geometria del piano così in quella dello spazio si può risolvere il problema fondamentale:

Date le coordinate (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) di due punti $P_1 P_2$, trovare le coordinate x, y, z del punto P che divide il segmento $P_1 P_2$ nel rapporto assegnato $\frac{m}{n}$.

Basterà scrivere le formole corrispondenti

$$(1) \quad x = \frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \quad y = \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}, \quad z = \frac{m z_2 + n z_1}{m+n}$$

che non differiscono da quelle del piano (§ 10) se non per la coordinata z in più e si dimostrano precisamente nello stesso modo.

§ 35.

Assi coordinati ortogonali - Coseni di direzione

Il più delle volte (quando la natura della questione trattata non indichi l'opportunità di una scelta contraria) si fa uso di assi cartesiani ortogonali, si assume cioè il triedro

coordinato trirettangolo; perchè tutte le formole (metriche) della geometria analitica vengono con questa scelta grandemente semplificate.

Supponiamo dunque che il triedro coordinato $Oxyz$ sia trirettangolo. Per fissare inoltre senza ambiguità il suo modo di <u>orientazione</u>, premettiamo le convenzioni seguenti. Quando di un piano π dello spazio sia fissato il senso positivo della normale si assumerà come pagina positiva del piano quella che è rivolta verso la direzione positiva della normale. Con ciò verrà anche fissato il senso positivo della rotazione su π, come quello da destra verso sinistra <u>sulla pagina positiva</u> (1)

Siccome dalla Oz perpendicolare al piano xy è già fissato il senso positivo, la pagina positiva del piano xy sarà quella che guarda verso la direzione positiva Oz e analogamente per gli altri due piani coordinati, in altre parole le pagine positive dei piani coordinati saranno le faccie interne nel triedro.

---

(1) Naturalmente sulla pagina negativa il senso positivo delle rotazioni sarà da sinistra verso destra.

coordinato. Ciò premesso, a seconda della disposizione degli assi coordinati può darsi che sulla pagina positiva del piano xy la direzione positiva dell'asse delle y giaccia alla sinistra rispetto a quella dell'asse delle x, ovvero alla destra, che si abbia cioè

$$\hat{xy} = \frac{\pi}{2}, \text{ ovvero } \hat{xy} = 3\frac{\pi}{2}.$$

Le direzioni positive degli assi essendo in nostro arbitrio, noi converremo, per fissare le idee, che l'orientazione del triedro coordinato $Oxyz$ corrisponda al primo caso, cioè sia

$$\hat{xy} = \frac{\pi}{2};$$

e allora si avrà anche, come è intuitivo:

$$\hat{yz} = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{zx} = \frac{\pi}{2},$$

cioè sulle pagine positive dei piani Oxy, Oyz, Oxz rispettivamente, la direzione positiva Oy giacerà alla sinistra rispetto alla Ox, così Oz alla sinistra di Oy e Ox alla sinistra di Oz.

Consideriamo ora nello spazio una retta qualunque r di cui sia anche fissato il senso positivo e diciamo α, β, γ gli angoli (fra 0 e π) che la direzione positiva r forma

rispettivamente colle tre direzioni positive degli assi. I coseni di questi angoli

$$\cos\alpha\,,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$$

prendono il nome di coseni di direzione della retta r. È chiaro che due rette parallele e rivolte nel medesimo senso hanno eguali i coseni di direzione; si può quindi supporre, come faremo sempre in seguito, che la direzione r di cui si tratta esca dall'origine. Osserviamo ancora che per la direzione opposta ad r, gli angoli α, β, γ si cangiano in $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ e quindi: cangiando il senso positivo di una direzione nell'opposto, i tre coseni di direzione cangiano contemporaneamente di segno.

Se descriviamo la sfera col centro nell'origine O e di raggio $=1$ e indichiamo con A, B, C i punti ove questa superficie sferica è intersecata dalle direzioni positive degli assi coordinati, saranno A, B, C i vertici di un triangolo sferico trirettangolo. Indicando poi con P il punto ove il semiraggio r interseca la superficie sferica saranno

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

le distanze sferiche di P da A, B, C cioè le lunghezze degli archi di cerchi massimi AP, B...

CP. Quando sono noti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sono note queste tre distanze sferiche e quindi il punto P sulla sfera è perfettamente determinato, perchè i tre circoli minori coi rispettivi centri in A, B, C e di raggi sferici = α, β, γ s'incontrano in P soltanto.(1)

Questa considerazione geometrica ci dimostra che i tre coseni di direzione $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ individuano perfettamente una direzione, e dimostra altresì che fra $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ha luogo di necessità una relazione, perchè già due dei detti circoli minori, p. e. quelli coi centri in A B, si incontrano in due punti soltanto P, Q e quindi dati solo $\cos\alpha$, $\cos\beta$ il terzo arco γ non può essere che la distanza sferica di P ovvero quella di Q da C.

Andiamo ora a confermare analiticamente quanto si è detto sopra per mezzo di formole che sono fondamentali nella geometria analitica a tre dimensioni.

Prima di tutto, considerando un punto

---

(1) Se avessero a comune anche un secondo punto i tre [circ]oli (centri) A, B, C dovrebbero essere sopra un arco [di c]erchio massimo, ciò che non è. "10"

P qualunque di coordinate x, y, z, troviamo la formola di la loro distanza ρ (assoluta) di P dall'origine. Se abbassiamo da P la perpendicolare PM sul piano xy, dal triangolo OPM rettangolo in M abbiamo:

$$(OP)^2 = (OM)^2 + (PM)^2.$$

Ma, essendo sul piano xy le coordinate ortogonali di M appunto x, y, ed essendo d'altronde $\overline{MP} = z$, ne risulta la formola fondamentale cercata

(2) $$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

indi

(2*) $$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

il radicale essendo preso positivamente.

Sopra un semiraggio r uscente da O coi coseni di direzione $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ prendasi ora un punto qualunque P le cui coordinate si indichino con x, y, z; queste sono per definizione le projezioni del segmento positivo $OP = \rho$ sugli assi Ox, Oy, Oz.

Il teorema delle projezioni ci dà quindi le formole fondamentali

(3) $$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\cos\beta, \quad z = \rho\cos\gamma$$

ovvero

(3*) $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Queste ci danno i valori dei coseni della direzione che dall' origine va al punto $P\equiv(x, y, z)$. Esse ci confermano che i coseni di direzione determinano perfettamente una direzione positiva. Quadrando e sommando le (3^*) si ha

$$\text{(I)} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ed è questa la relazione già sopra accennata, che lega tre coseni di direzione.

Si osservi che inversamente tre costanti a, b, c legate dalla relazione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

possono uguagliarsi a tre coseni di direzione, giacchè, per le (3^*), la direzione che va da O al punto (a, b, c) ha per coseni di direzione appunto

$$\cos\alpha = a, \quad \cos\beta = b, \quad \cos\gamma = c.$$

Possiamo esprimere questo resultato così:

<u>I tre coseni di una direzione r (uscente dall'origine) sono le coordinate del punto ove il semiraggio r interseca la superficie della sfera col centro in O e di raggio = 1.</u>

In particolare si osservi. I coseni delle direzioni positive degli assi sono

1, 0, 0 per l'asse delle x
0, 1, 0 " " " y
0, 0, 1 " " " z.

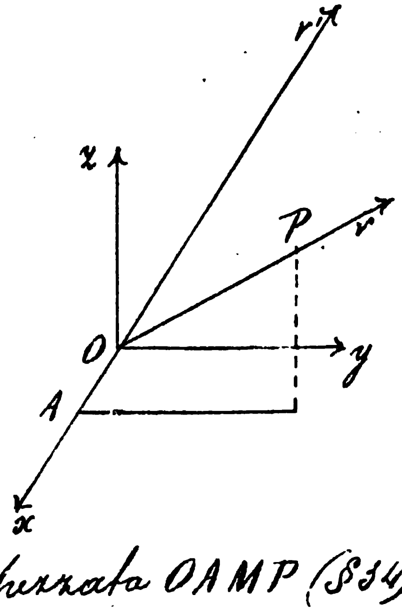
§ 36.

Angolo di due direzioni

Assegnate due direzioni positive r, r' (uscenti dall'origine) mediante i loro rispettivi coseni di direzione

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma \quad \text{per la } r$$
$$\cos\alpha', \ \cos\beta', \ \cos\gamma' \quad \text{„ „ } r'$$

resta perfettamente determinato l'angolo θ fra 0 e π compreso fra r, r'. Ci proponiamo di calcolare θ in funzione di quei coseni di direzione. Perciò prendiamo sopra uno dei due semiraggi r, r', p. e. su r un punto qualunque P; siano x, y, z le sue coordinate e



$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

la sua distanza dall'origine, sicchè

$$\overline{OP} = \rho.$$

Caliamo poi da P la perpendicolare PM sul piano xy, da M la perpendicolare MA sopra l'asse Ox formandosi la spezzata $OAMP$ (§ 34) tale che

$$\overline{OA} = x, \quad \overline{AM} = y, \quad \overline{MP} = z.$$

La risultante di questa linea poligonale aperta è $\overline{OP}$, e noi applichiamo ora il teorema C) § 13 della teoria delle projezioni, assumendo come asse di projezione l'altra direzione r'. Per le notazioni introdotte ne risulta

$$\rho \cos\theta = x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma';$$

sostituendo per x, y, z i valori (3) e dividendo per ρ si ha la formola cercata

$$\text{(II)} \qquad \cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'$$

che ci dà il coseno dell'angolo θ (fra 0 e π) e lo definisce quindi perfettamente. La (II), che è una delle formole più usate nella geometria analitica dello spazio, include, come caso particolare, la relazione (I) fra i tre coseni di direzione; la (I) segue invero dalla (II) facendo coincidere le due direzioni r, r'.

Dalla (II) deduciamo facilmente la formola che dà sen θ, avvertendo che necessariamente sen θ è positivo (o nullo) poichè $0 \leq \theta \leq \pi$. Se formiamo, secondo la nota regola, il quadrato della matrice

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{Vmatrix}$$

ricordando che

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\ \cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=\cos\theta,$$

ne deduciamo

$$\begin{Vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma'\end{Vmatrix}^2=\begin{vmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2\theta$$

e sostituendo al quadrato simbolico della matrice il suo valore effettivo, abbiamo per la formola cercata

$$(II^*)\quad \operatorname{sen}\theta=+\sqrt{\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta' & \cos\gamma'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ \cos\gamma' & \cos\alpha'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha' & \cos\beta'\end{vmatrix}^2}.$$

Di uso frequentissimo è la condizione d'ortogonalità per due direzioni; questa si deduce subito dalla (II), osservando che se r, r' sono perpendicolari deve essere $\cos\theta=0$. Enunciamola esplicitamente così: <u>Affinchè le due direzioni ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$)</u> (1) <u>($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) siano ortogonali è necessario e sufficiente che si abbia</u>

$$(III)\quad \underline{\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0.}$$

Sappiamo già che per due direzioni parallele (coincidenti o no in verso positivo)

---

(1) Qui ed in seguito per direzione ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) intendiamo quella che ha i coseni di direzione

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma.$$

si deve avere

$$\cos\alpha' = \pm\cos\alpha\,,\quad \cos\beta' = \pm\cos\beta\,,\quad \cos\gamma' = \pm\cos\gamma$$

La stessa cosa si deduce dalla (II*) perchè deve essere allora $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ indi sen $\theta = 0$ e perciò

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma'\,;$$

e siccome la somma dei quadrati degli uni e degli altri coseni di direzione è $=1$, ne seguono appunto le formole superiori.

§ 87.

Coseni della direzione normale a due date.

Consideriamo due direzioni o semiraggi a, b (uscenti dall'origine) e siano:

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3$$
$$b_1\,,\ b_2\,,\ b_3$$

i loro rispettivi coseni di direzione.(1) Indichiamo con γ la direzione normale ad ambedue, lasciandone nel momento indeterminato il verso positivo; siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni della direzione γ che

(1) D'ora innanzi indicheremo per brevità ciascun coseno di direzione con una sola lettera.

risulteranno evidentemente determinati a meno di un cangiamento simultaneo di segno.

Scrivendo la condizione d'ortogonalità (III) fra le direzioni a e j e così l'altra fra b e j, abbiamo per le incognite j_1, j_2, j_3 le due equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 = 0 \\ b_1 j_1 + b_2 j_2 + b_3 j_3 = 0, \end{cases}$$

dalle quali, come è ben noto, si rileva che j_1, j_2, j_3 sono proporzionali ordinatamente ai tre minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix},$$

presi coi debiti segni; si ha cioè

$$j_1 = k \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad j_2 = k \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad j_3 = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

dove k è un coefficiente di proporzionalità. Per determinare k (o meglio k^2) basta quadrare e sommare le tre precedenti ricordando che

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 1$$

e d'altra parte, per la (II*), la somma dei quadrati dei tre minori indicati, o il quadrato della matrice, eguaglia $\operatorname{sen}^2\theta$ indicando θ l'angolo fra 0 e π compreso fra le direzioni positive a, b. Così dunque $k^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$ e quindi

(4) $p_1 = \pm \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \; p_2 = \pm \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \; p_3 = \pm \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$

Come si era previsto, p_1, p_2, p_3 vengono così determinati a meno di un cangiamento simultaneo di segno dipendentemente da questo che ancora non si è fissata la direzione positiva di p, ossia la pagina positiva del piano $a\,b$. Ciò facciamo ora con la convenzione seguente: considerando $\underline{a}$ come prima, $\underline{b}$ come seconda direzione, assumiamo come pagina positiva del piano ab quella su cui la direzione $\underline{b}$ giace alla sinistra rispetto ad $\underline{a}$, ossia quella su cui l'angolo $\widehat{ab}$, misurato nel verso positivo delle rotazioni, è congruo con θ. Dimostriamo allora che le formole (4), precisate anche nel segno, si scrivono:

(4*) $p_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{ab}} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \; p_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{ab}} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \; p_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{ab}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

La dimostrazione che ora diamo è fondata sopra considerazioni di continuità; in seguito, trovate le formole per la trasformazione delle coordinate, potremo stabilire la medesima cosa con metodo più elementare.

Immaginiamo che, tenendo fisse le

direzioni a, b indi la j, si faccia muovere con continuità il triedro coordinato attorno all'origine; varieranno allora con continuità gli angoli delle direzioni a, b, j cogli assi quindi i loro coseni; nelle formole (4) varieranno con continuità tanto i primi quanto i secondi membri presi sempre con lo stesso segno (il superiore o l'inferiore). Da ciò risulta che, rotando con continuità gli assi coordinati, nelle (4) dovremo prendere nei secondi membri o sempre il segno superiore o sempre quello inferiore, perchè un cangiamento brusco di segno porterebbe necessariamente una discontinuità p. e. in j_1 a meno che non fosse $j_1 = 0$; ma allora essendo

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 1$$

uno almeno degli altri due j_2, j_3 sarebbe diverso da zero e potremmo applicare la considerazione stessa a j_2 o a j_3. Ciò premesso, facciamo rotare con continuità gli assi coordinati fino a sovrapporre la direzione positiva <u>x</u> sulla <u>a</u> e la direzione positiva <u>z</u> sulla j; i valori di a_1, a_2, a_3; j_1, j_2, j_3 saranno da ultimo

$$\text{e} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 0$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 1,$$

onde la 3ª delle (4) dà

$$\text{sen}(\hat{ab}) = \pm b_2$$

Ora [1].

$$b_2 = \cos(\hat{by}) = \cos(\hat{XY} - \hat{xb}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{ab}\right) = \text{sen}\,\hat{ab};$$

dunque dobbiamo scegliere i segni superiori c.d.d.

§ 38.

Determinante dei nove coseni

Consideriamo tre direzioni a, b, c (uscenti dall'origine) e indicando con a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 i loro rispettivi coseni di direzione, formiamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

e sviluppiamolo per gli elementi dell'ultima linea; avremo

(1) Qui con X, Y indichiamo le direzioni positive degli assi nella posizione finale, ove X è sovrapposto ad $\underline{a}$.

$$\Delta = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

e per le (4*)

$$\Delta = \mathrm{sen}\,(\hat{ab})\{c_1 j_1 + c_2 j_2 + c_3 j_3\},$$

ossia

(5) $$\Delta = \mathrm{sen}\,(\hat{ab}) \cos(\hat{cj})$$

indicando con $\hat{cj}$ l'angolo che la direzione positiva $\underline{c}$ forma colla direzione positiva j normale ad $\underline{a}$ e $\underline{b}$, fissata come al § prec..

È chiaro che due altre formole analoghe alla (5) si avranno sviluppando Δ per gli altri elementi della prima e della seconda linea. Così indicando con α la normale comune a $\underline{bc}$ fissandone la direzione positiva in guisa che $\underline{c}$ resti alla sinistra di b, e similmente con β la normale comune a $\underline{ca}$, avremo

(5*) $$\Delta = \mathrm{sen}\,(\hat{ab}) \cos(\hat{cj}) = \mathrm{sen}\,(\hat{bc}) \cos(\hat{a\alpha}) = \mathrm{sen}\,(\hat{ca}) \cos(\hat{b\beta}).$$

Si vede facilmente che l'eguaglianza dei tre prodotti scritti esprime questo teorema di trigonometria sferica: <u>In ogni triangolo sferico i seni dei lati sono inversamente proporzionali ai seni delle tre altezze corrispondenti</u>.

Vediamo quale condizione esprime

l'annullarsi di Δ. Per la (5) ciò avviene solo quando $\operatorname{sen}(\hat{ab})=0$ ovvero $\cos(\hat{cj})=0$; nel primo caso a, b coincidono o sono per diritto, nel secondo è $\hat{cj}=\frac{\pi}{2}$, quindi j essendo perpendicolare ad a, b, c queste tre direzioni stanno in un piano. Ma anche nel primo caso si può dire che a, b, c stanno in un piano; viceversa quando a, b, c sono complanari è $\cos(\hat{cj})=0$ o $\operatorname{sen}(\hat{ab})=0$, quindi $\Delta=0$. Dunque: <u>L'annullarsi del determinante Δ dei nove coseni delle tre direzioni a, b, c esprime che queste stanno in un piano</u>.

In generale il valore assoluto di Δ è ≤ 1 e si può quindi porre

$$\Delta = \operatorname{sen}\Omega$$

essendo Ω un angolo conveniente. Brevemente dicesi Δ il seno <u>dell'angolo triedro a b c</u>.

Consideriamo ora il caso particolare importante che le tre direzioni a, b, c siano due a due ortogonali cioè formino <u>una terna ortogonale</u>. Allora j coinciderà con <u>c</u> o colla direzione opposta; avverrà il primo caso se sulla pagina del piano a b che guarda verso <u>c</u> la direzione positiva <u>b</u> rimane alla sinistra

di a, il secondo sul caso opposto. La terna (a, b, c) dicesi nel primo caso orientata come la terna (x, y, z) degli assi, nel secondo inversamente orientata.

Si esprime la medesima cosa dicendo che girando la terna (x, y, z) attorno ad O così da sovrapporre x, y (le loro direzioni positive) ad a, b rispettivamente, la direzione z si sovrapporrà nel primo caso alla c nel secondo alla direzione opposta, onde le due terne si diranno direttamente congruenti nel 1° caso, inversamente nel 2°.

La (5) essendo $\hat{ab} = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{cj} = 0$ per la congruenza diretta, invece $\hat{cj} = \pi$ per la congruenza inversa, ci dà corrispondentemente

$$\Delta = +1, \quad \text{ovvero} \quad \Delta = -1.$$

Dunque: Il determinante dei nove coseni di una terna ortogonale (a, b, c) è uguale all'unità positiva o negativa secondo che la terna (a, b, c) è direttamente congruente ovvero inversamente congruente colla terna (x, y, z) degli assi coordinati[1].

---

(1) Prescindendo dalla precisa determinazione del segno, si dimostra subito questa proprietà formando il quadrato di

Le formole (4*) e le analoghe, osservando che $f_1 = \pm c_1$, $f_2 = \pm c_2$, $f_3 = \pm c_3$ secondo che $\Delta = \pm 1$, ci danno l'altra notevole proprietà:

In ogni tale determinante Δ ciascun elemento è uguale al suo complemento algebrico preso col suo segno o col segno cangiato, secondo che $\Delta = +1$, o $\Delta = -1$.

"§ 39"

Formole fondamentali di triedrometria o trigonometria sferica.

Tre direzioni positive a, b, c (uscenti da O) individuano un triedro le cui tre facce sono gli angoli piani

---

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ricordando che $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ ecc. Si ha così

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ indi } \Delta = \pm 1.$$

$$\hat{ab}\ ,\ \hat{bc}\ ,\ \hat{ca}\ ;$$

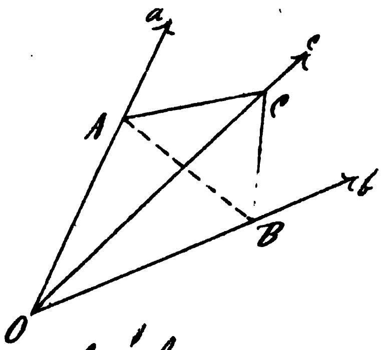
indichiamo inoltre con

$$A,\ B,\ C$$

gli angoli diedri (interni) del triedro lungo le rispettive costole

$$a,\ b,\ c.$$

Per uniformarci alle consuete notazioni trigonometriche, indicheremo anche con una sola lettera le facce del triedro e precisamente colle stesse lettere a, b, c le facce opposte alle costole omonime sicchè $\hat{bc}$ sarà il valore di <u>a</u> ecc. Se descriviamo la sfera col centro in O e di raggio = 1, le faccie del triedro taglieranno sulla sfera il triangolo sferico ABC i cui lati sono le facce del triedro e gli angoli del triangolo misureranno i diedri del triedro.



Considerando come elementi nel triedro (nel triangolo sferico) le tre facce a, b, c ed i tre angoli diedri A, B, C è ben noto che tre di questi elementi determinano gli altri tre, per ciò fra questi 6 elementi sussistono 3 relazioni indipendenti che costituiscono le formole fondamentali della triedrometria e trigonometria sferica.

Per stabilire queste formole basta p. e. stabilire quella che ha luogo fra le tre facce a, b, c ed il diedro A. Per questo procediamo nel modo seguente. Prima di tutto supponiamo, per fissare le idee, che le tre costole a, b, c si succedano in tal ordine che il determinante dei nove coseni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

abbia un valore positivo, ciò che è lecito bastando nel caso opposto scambiare due delle direzioni, con che Δ cangia segno. Le convenzioni adottate al §. prec. per le direzioni positive delle normali α, β, γ alle facce

$$bc, \quad ca, \quad ab$$

hanno a causa delle (5*), questo effetto che gli angoli $\hat{a\alpha}$, $\hat{b\beta}$, $\hat{c\gamma}$ sono acuti, perchè essendo p. e. $sen(\hat{bc}) > 0$ e $\Delta > 0$ la formola

$$\Delta = sen(\hat{bc}) \cos(\hat{a\alpha})$$

mostra che anche $\cos(\hat{a\alpha}) > 0$. Così adunque le pagine positive dei piani

$$bc, \quad ca, \quad ab$$

saranno le <u>interne</u> nel triedro. Da questo resulta subito che avremo

$$A=\pi-\widehat{\beta\gamma}\,,\quad B=\pi-\widehat{\gamma\alpha}\,,\quad C=\pi-\widehat{\alpha\beta}\,,$$

e quindi

$$(6)\qquad \cos A=-\cos\widehat{\beta\gamma}=-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)\,.$$

Ma per le (4*)

$$\gamma_1=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\widehat{ab}}\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\mathrm{sen}(\widehat{ab})}\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\quad \gamma_3=\frac{1}{\mathrm{sen}(\widehat{ab})}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}$$

e analogamente

$$-\beta_1=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\widehat{ca}}\begin{vmatrix}a_2&a_3\\c_2&c_3\end{vmatrix},\quad -\beta_2=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\widehat{ca}}\begin{vmatrix}a_3&a_1\\c_3&c_1\end{vmatrix},\quad -\beta_3=\frac{1}{\mathrm{sen}\,\widehat{ca}}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}.$$

Sostituendo nella (6) e ricordando che per le nostre notazioni $\widehat{ab}=c$, $\widehat{ca}=b$, abbiamo

$$\cos A=\frac{1}{\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c}\left\{\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_2&a_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_3&a_1\\c_3&c_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1&a_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\right\}$$

o, colla notazione del prodotto di matrici:

$$\cos A=\frac{1}{\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c}\cdot\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{matrix}\right\|$$

Eseguendo il prodotto colla nota regola ed osservando che

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\qquad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\cos(\widehat{ab})=\cos c$$
$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=\cos(\widehat{ac})=\cos b$$
$$b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=\cos(\widehat{bc})=\cos a$$

viene

$$\cos A=\frac{1}{\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c}\begin{vmatrix}1&\cos b\\\cos c&\cos a\end{vmatrix}$$

ossia

(7) $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$

che è la formola fondamentale richiesta.

Permutando circolarmente le lettere si hanno le altre due che danno tutte le relazioni esistenti fra i lati e gli angoli di un triangolo sferico. Si considerano bensì in trigonometria sferica numerose altre forme di relazioni fra i 6 elementi del triangolo; ma esse sono tutte necessariamente conseguenze delle tre fondamentali citate e da queste deduconsi algebricamente.

§ 40

Trasformazione delle coordinate

Come per il piano, così per lo spazio è importante ricercare come cangiano le coordinate di un punto cangiando gli assi, il ricercare cioè le formole di trasformazione delle coordinate.

Conviene anche qui decomporre il passaggio in più passaggi elementari successivi nel modo seguente.

1° Traslazione degli assi. I nuovi assi O'X, O'Y, O'Z hanno le medesime direzioni (positive) degli antichi assi Ox, Oy, Oz ma diversa origine.

Indicando con a, b, c le coordinate antiche della nuova origine e procedendo in modo affatto analogo come al §11 pel piano, troviamo che le formole di trasformazione sono in questo caso semplicemente:

$$(IV) \qquad x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c.$$

2° Passaggio da un sistema ortogonale ad uno obliquo colla stessa origine (e viceversa). Sia Ox, Oy, Oz l'antico sistema ortogonale ed OX, OY, OZ il nuovo obliquo. Per fissare perfettamente la posizione dei nuovi assi rispetto ai primitivi basterà dare di ciascun nuovo asse (della sua direzione positiva) i coseni di direzione, siano

a_1, a_2, a_3 per l'asse OX

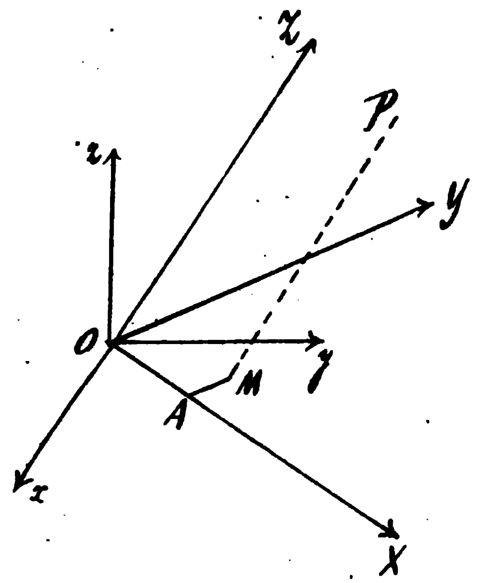
b_1, b_2, b_3 " " OY

c_1, c_2, c_3 " " OZ.(1)

---

(1) Per ricordare il significato delle a, b, c basta riferirsi al seguente specchietto

	X	Y	Z
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3



Preso ora un punto qualunque P dello spazio si indichino con x, y, z le sue antiche, con X, Y, Z le sue nuove coordinate e costruita rispetto ai nuovi assi la spezzata (§ 34) OAMP tale che

$$\overline{OA} = X, \ \overline{AM} = Y, \ \overline{MP} = Z$$

si projetti la risultante OP e la spezzata successivamente sugli assi primitivi Ox, Oy, Oz.

Applicando il teorema c) § 13 delle projezioni ne deduciamo le formole:

$$(V) \quad \begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases}$$

che sono le formole cercate di trasformazione che fanno passare dal sistema obliquo O(X, Y, Z) all'ortogonale O(x, y, z) e per avere le formole inverse basta risolvere le (V) rapporto a X, Y, Z ricordando che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

il quale eguaglia (§38) il seno dell'angolo triedro coordinato $O(X, Y, Z)$, è certamente diverso dal zero perchè i nuovi assi X, Y, Z non stanno in un piano (§38).

Indicando allora colle lettere majuscole corrispondenti i complementi algebrici degli elementi di Δ, queste formole si scrivono

$$(V^*)\quad\begin{cases} X = \dfrac{A_1}{\Delta}x + \dfrac{A_2}{\Delta}y + \dfrac{A_3}{\Delta}z \\ Y = \dfrac{B_1}{\Delta}x + \dfrac{B_2}{\Delta}y + \dfrac{B_3}{\Delta}z \\ Z = \dfrac{C_1}{\Delta}x + \dfrac{C_2}{\Delta}y + \dfrac{C_3}{\Delta}z . \end{cases}$$

3° Passaggio di un sistema obliquo $O(x, y, z)$ ad un altro obliquo $O(X, Y, Z)$ colla medesima origine.

Si introduca un sistema ausiliario ortogonale $O(\xi, \eta, \zeta)$ di assi e si indichino con x, y, z; X, Y, Z; ξ, η, ζ le coordinate di un medesimo punto P riferite rispettivamente all'antico, al nuovo ed al sistema ausiliario.

Ora x, y, z si esprimeranno per le ξ, η, ζ con formole del tipo (V^*), cioè saranno x, y, z funzioni lineari omogenee di ξ, η, ζ; queste alla loro volta verranno espresse per X, Y, Z con formole

come le (V), cioè saranno funzioni lineari omogenee di X, Y, Z. Dunque, eliminando le ausiliarie, le formole di trasformazione cercate avranno la forma

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \\ z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z, \end{cases}$$

dove le α, β, γ sono costanti. Naturalmente il determinante della <u>sostituzione lineare omogenea</u> (VI) è diverso da zero, altrimenti dovrebbe sussistere una relazione lineare omogenea fra x, y, z, le quali sono invece arbitrarie (1).

Così adunque: <u>Se si cangiano gli assi senza cangiare l'origine, le antiche coordinate sono funzioni lineari omogenee delle nuove ed inversamente; ossia ogni tale trasformazione si effettua con una sostituzione lineare omogenea sulle coordinate.</u>

Osserviamo ancora che se si effettuano due

---

(1) Ciò si vede anche osservando che la (VI) è composta di due successive sostituzioni lineari omogenee a determinante non nullo e pel teorema seguente A) del testo il determinante della (VI) è il prodotto dei due determinanti delle componenti.

tali successivi passaggi da $O(x, y, z)$ ad $O(X, Y, Z)$ indi da $O(X, Y, Z)$ ad $O(\xi, \eta, \zeta)$ basterà esprimere x, y, z per X, Y, Z queste per ξ, η, ζ con una sostituzione lineare omogenea che dicesi composta delle due (nell'ordine indicato). È subito visto che sussiste il teorema:

A) Il determinante (modulo) della sostituzione composta è eguale al prodotto dei determinanti delle sostituzioni componenti.

4° Trasformazione generale degli assi.

L'antico sistema sia $O(x, y, z)$, il nuovo $O'(X, Y, Z)$, dove è cangiata l'origine e sono cangiate le direzioni degli assi. Inseriamo un sistema ausiliario $O'(\xi, \eta, \zeta)$ di assi, avente in comune col nuovo l'origine coll'antico le direzioni positive degli assi. Il passaggio dall'antico sistema all'ausiliario si effettua colle formole (IV) di traslazione

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c,$$

dove a, b, c sono le coordinate antiche della nuova origine; poi ξ, η, ζ si esprimono per X, Y, Z con formole del tipo (VI), onde si ha finalmente:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + a \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z + b \\ z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z + c. \end{cases}$$

Queste sono le formole più generali di trasformazione delle coordinate. Esse ci dimostrano che: <u>In qualunque cangiamento di assi coordinati le antiche coordinate di un punto sono funzioni lineari intere delle nuove ed inversamente.</u>

§41.
Distanza di due punti nello spazio

Applichiamo le formole di trasformazione delle coordinate alla ricerca della formola importante che esprime la distanza di due punti $P_1 P_2$ dello spazio in funzione delle loro coordinate.

Abbiamo già osservato che se gli assi $O(x,y,z)$ sono ortogonali la distanza ρ del punto (x,y,z) dall'<u>origine</u> è dato dalla formola (2) §35

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Per trovare la formola analoga per assi obliqui $O(X,Y,Z)$ basta far uso delle formole (VI) che danno il passaggio dal sistema obliquo all'ortogonale. Quadrando e sommando le (VI) col ricordare le formole

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \qquad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\cos(\widehat{XY})$$
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \qquad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=\cos(\widehat{YZ})$$
$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \qquad c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=\cos(\widehat{ZX})$$

e indicando con

$$\alpha = \hat{YZ}\ ,\ \beta = \hat{ZX}\ ;\ \gamma = \hat{XY}$$

le facce del triedro coordinato $O(X, Y, Z)$ troviamo per la formola richiesta

(8) $\rho^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY\cos\gamma + 2YZ\cos\alpha + 2ZX\cos\beta$.

Ciò premesso, sia $O(x, y, z)$ un sistema qualunque di assi e $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2\ y_2\ z_2)$ due punti dati, $\underline{d}$ la loro distanza. Con una traslazione di assi trasportiamo l'origine dei nuovi assi X, Y, Z in P_1 mediante le formole di trasformazione (IV)

$$x = X + x_1\ ,\quad y = Y + y_1\ ,\quad z = Z + z_1\ ,$$

Saranno quindi

$$X = x_2 - x_1\ ,\quad Y = y_2 - y_1\ ,\quad Z = z_2 - z_1$$

le nuove coordinate di P_2 e per la sua distanza $\underline{d}$ da P_1 che è la nuova origine, avremo per la (8):

(9) $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\gamma + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\cos\alpha + 2(z_2 - z_1)(x_2 - x_1)\cos\beta$.

È questa la formola generale cercata; nel caso più frequente di assi ortogonali si ha $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, quindi la formola si semplifica nell'altra

(9*) $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

§ 42.

Rotazione degli assi coordinati ortogonali.

Ritornando ora alle formole di trasformazione consideriamo da vicino il caso particolare più importante che tanto gli antichi quanto i nuovi assi siano ortogonali ed abbiano a comune l'origine. Valgono allora le formole (V)

$$(V) \qquad \begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases}$$

dove di più, essendo anche i nuovi assi ortogonali, sussistono fra le nove costanti a, b, c le relazioni

$$(10) \qquad \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

oltre le tre consuete pei coseni di direzione

$$(11) \qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{cases}$$

Ne segue, invertendo la denominazione di antichi e di nuovi assi, che le formole inver=

se saranno

$$\begin{cases} X = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

ciò che del resto si vede anche subito formando le espressioni dei secondi membri ed osservando le (10), (11). Risulta di qui che sussistono le altre relazioni:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 , & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 , & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 , & a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0 \end{aligned}$$

che sono naturalmente conseguenze algebriche delle (10), (11).

Supponiamo ora che le due terne ortogonali (x, y, z), (X, Y, Z) siano <u>direttamente congruenti</u>, che cioè il nuovo sistema di assi si ottenga facendo rotare convenientemente l'antico attorno all'origine. Al § 38 abbiamo dimostrato, appoggiandoci a considerazioni di continuità, che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

è uguale a +1 (non a −1). Vogliamo ora dedurre il medesimo risultato da considerazioni più

elementari e così anche per le formole (4*) che assegnal, precisati in segno, i coseni della direzione normale a due date a, b, otterremo una nuova dimostrazione più elementare.

Per ciò cominciamo dall'osservare che il passaggio dalla terna $O(x, y, z)$ alla finale congruente $O(X, Y, Z)$ si può in generale decomporre in tre passaggi successivi in guisa che in ogni passaggio elementare resta immobile un asse e rotano gli altri due attorno a questo. E infatti se i due piani Oxy, OXY sono distinti si taglieranno secondo una retta Ox_1 di cui si fisserà (dapprima in modo arbitrario) il verso positivo e sarà Ox_1 normale al piano OzZ. Si faccia rotare la terna $O(x, y, z)$ attorno ad Oz immobile finchè Ox si sovrapponga ad Ox_1 e si avrà una nuova terna $O(x_1, y_1, z_1)$. Questa si faccia ora rotare attorno ad Ox_1 finchè Oz si sovrapponga ad OZ e si avrà una seconda terna ausiliaria $O(x_1, y_2, Z)$ avente a comune colla finale l'asse OZ. In fine si roti $O(x_1, y_2, Z)$ attorno ad OZ finchè Ox_1 si sovrapponga ad OX, indi Oy_2 ad OY ed avremo la terna finale $O(X, Y, Z)$.

Se poi i due piani xy, XY coincidono, coinciderà Z con z o colla direzione opposta. Nel

primo caso basterà già una sola rotazione attorno ad Oz, nel secondo si potrà p. e. fare una rotazione di π attorno ad Ox, poi una conveniente rotazione attorno ad Oz.

Ciò premesso basta ora osservare: 1° che in ciascuno dei tre passaggi elementari restando immobile un asse, resta fisso la corrispondente coordinata e le altre due si trasformano colle formole di rotazione degli assi coordinati ortogonali nel piano che debbono scriversi sotto la forma (12) § 15 considerando come secondo asse quello che giace alla sinistra rispetto al primo. Così secondo che resta fisso l'asse Oz od Ox, od Oy le formole saranno

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\text{sen}\,\alpha \\ y = X\,\text{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha \\ z = Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X \\ y = Y\cos\alpha - Z\,\text{sen}\,\alpha \\ z = Y\,\text{sen}\,\alpha + Z\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = Z\,\text{sen}\,\alpha + X\cos\alpha \\ y = Y \\ z = Z\cos\alpha - X\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

2°. che in qualunque di questi passaggi il determinante corrispondente

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\text{sen}\,\alpha, & 0 \\ \text{sen}\,\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & 0, & \text{sen}\,\alpha \\ 0, & 1, & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha, & 0, & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

è sempre $= +1$.

È allora pel teorema A) del § 40, essendo il determinante Δ della sostituzione composta

eguale al prodotto dei determinanti delle tre componenti, sarà anche $\Delta = +1$, c. d. d.

Dopo ciò possiamo dare la dimostrazione annunciata delle formole (4*) senza considerazioni di continuità. Partendo per ciò dalle (4) già stabilite con un'ambiguità di segno, consideriamo una nuova terna ortogonale $O(X,Y,Z)$ direttamente congruente colla terna degli assi facendo coincidere OX con a, OZ con f onde saranno

a_1, a_2, a_3 i coseni di direzione di OX

f_1, f_2, f_3 " " " " " OZ

e indicando con $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ quelli di OY sarà

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = +1$$

e dalle (4) stesse risulta

$$\bar{b}_1 = \pm(a_3 f_2 - a_2 f_3), \quad \bar{b}_2 = \pm(a_1 f_3 - a_3 f_1), \quad \bar{b}_3 = \pm(a_2 f_1 - a_1 f_2).$$

Ma se si sviluppa il determinante superiore per gli elementi della seconda terna e si osserva che il suo valore è +1 viene a togliersi l'ambiguità di segno e si ha

$$\bar{b}_1 = a_3 f_2 - a_2 f_3, \quad \bar{b}_2 = a_1 f_3 - a_3 f_1, \quad \bar{b}_3 = a_2 f_1 - a_1 f_2.$$

Formiamo ora

$$b_1\bar{b}_1 + b_2\bar{b}_2 + b_3\bar{b}_3 = f_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + f_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + f_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ossia per le (4) stesse

$$b_1 b_2^- + b_2 b_2^- + b_3 b_3^- = \pm \operatorname{sen}\theta\,(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2) = \pm \operatorname{sen}\theta.$$

Ora

$$b_1 b_1^- + b_2 b_2^- + b_3 b_3^- = \cos(b\hat{Y}) = \cos(X\hat{Y} - X\hat{b}) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = + \operatorname{sen}\theta$$

Dunque valgono i segni superiori, c.d.d.

"§ 43"

Angoli di Eulero

Nelle formole di rotazione degli assi coordinati ortogonali figurano <u>nove</u> costanti a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$ legate da <u>sei</u> relazioni (10), (11); di queste costanti ne restano quindi solo $9-6=3$ indipendenti. In varie applicazioni, anzichè scrivere le formole generali tenendo conto delle 6 relazioni (10), (11), è più opportuno esprimere le 9 costanti per 3 parametri ausiliarii. Per questi possono prendersi i così detti <u>angoli d'Eulero</u> i quali non sono altro che l'ampiezza delle rotazioni da eseguirsi nel passaggio elementare da una delle terne nel § precedente

(12) $O(x,y,z)$; $O(x_1,y,z)$, $O(x_1,y_2,z)$; $O(X,Y,Z)$

alla successiva. Ma per precisare ancora il modo

come si misureranno questi angoli facciamo le convenzioni seguenti. Indichiamo con θ l'angolo fra 0 e π delle direzioni positive Oz, OZ, angolo che misura altresì la mutua inclinazione dell'antico e nuovo piano $(xy$. Per pagina positiva del piano zOZ prendiamo poi quella sulla quale OZ giace alla sinistra di Oz; così sarà perfettamente fissata la direzione positiva della normale Ox_1 al detto piano e conseguentemente anche la direzione positiva di Oy_2. Dopo ciò indichiamo con φ il minimo angolo fra 0 e 2π di cui dobbiamo rotare attorno ad Oz la prima delle terne (12) per sovrapporla alla seconda $O(x_1 y_1 z)$. Sarà allora, per le convenzioni superiori, θ la minima rotazione nel verso positivo attorno ad Ox, che sovrappone la seconda terna alla terza $O(x_1, y_2, Z)$. Infine indichiamo con ψ la minima rotazione fra 0 e 2π che eseguita attorno ad OZ sovrappone la terza terna alla finale $O(X, Y, Z)$. <u>Gli angoli φ, θ, ψ così precisamente definiti si diranno gli angoli d'Eulero.</u>(1)

---

(1) Si ricordi che per le convenzioni fatte, θ è fra

Per un punto qualunque P dello spazio indichiamo ora con x, y, z le antiche coordinate, con X, Y, Z le finali e similmente con

$$x_1, y_1, z$$
$$x_1, y_2, Z$$

le coordinate dello stesso punto riferite alle terne ausiliarie. Per il primo passaggio rimane fisso l'asse Oz e l'angolo di rotazione è φ, dunque si ha

$$a) \quad \begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi \\ y = x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi. \end{cases}$$

Nel secondo rimane fisso Ox_1 e l'angolo di rotazione è θ, onde

$$b) \quad \begin{cases} y_1 = y_2 \cos\theta - Z \operatorname{sen}\theta \\ z = y_2 \operatorname{sen}\theta + Z \cos\theta \end{cases}$$

In fine nel terzo passaggio la rotazione è attorno ad OZ ed ha l'ampiezza ψ, quindi

$$c) \quad \begin{cases} x_1 = X \cos\psi - Y \operatorname{sen}\psi \\ y_2 = X \operatorname{sen}\psi + Y \cos\psi \end{cases}$$

Eliminando le ausiliarie x_1, y_1, y_2 fra le a) b) c) otteniamo finalmente:

$$\begin{cases} x = [\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi] X - [\cos\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi] Y + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi Z \\ y = [\operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\psi] X + [-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\theta \cos\varphi \cos\psi] Y - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi Z \\ z = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi X + \operatorname{sen}\theta \cos\psi Y + \cos\theta Z \end{cases}$$

0 e π, gli altri due angoli fra 0 e 2π.

Paragonando colle formole generali (V) deduciamo le seguenti:

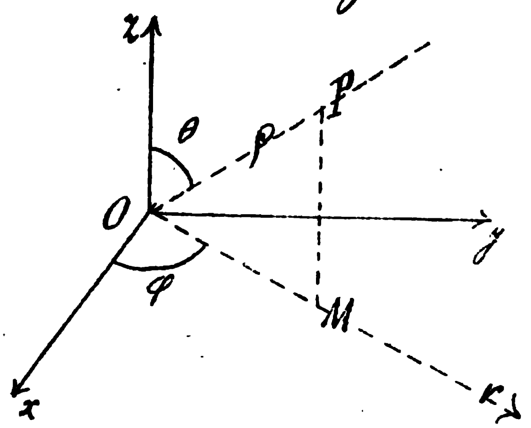
$$\begin{cases} a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi, & b_1 = -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi, & c_1 = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ a_2 = \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi, & b_2 = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi, & c_2 = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \\ a_3 = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi, & b_3 = \mathrm{sen}\,\theta\cos\psi, & c_3 = \cos\theta, \end{cases}$$

le quali esprimono, come si voleva, le 9 costanti a, b, c per gli angoli Euleriani θ, φ, ψ per mezzo delle loro linee trigonometriche.

§ 44.

Coordinate polari

Fino ad ora abbiamo trattato, nello spazio, del solo sistema Cartesiano di coordinate. Veniamo ora a dire qualche cosa del sistema di coordinate polari, che dopo il sistema Cartesiano è quello più usato nella geometria analitica (elementare)



dello spazio. Per abbreviare, partiamo da un sistema Cartesiano ortogonale $O(x, y, z)$ e preso un punto qualunque P dello spazio, caliamo da P la perpendicolare PM sul piano xy, tiriamo

OM ed OP fissando i versi positivi di queste rette da O verso M, P rispettivamente. Indichiamo con ρ la distanza assoluta di P da O, con θ l'angolo (fra 0 e π) formato dalle direzioni positive Oz, OP (1) in fine poniamo $\hat{x r} = \varphi$ indicando con r il semiraggio OM; potremo allora assumere φ fra 0 e 2π.

È chiaro che ad ogni punto P dello spazio corrisponderanno tre valori determinati per

$$\rho, \theta, \varphi$$

dove $\rho > 0$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. E inversamente presi tre valori qualunque per ρ, θ, φ entro questi limiti vi corrisponderà un punto P dello spazio. <u>Diremo ρ, θ, φ le coordinate polari del punto P.</u>

Le relazioni fra le coordinate polari e le cartesiane (ortogonali) si trovano subito osservando che se si pone $\overline{OM} = r$ saranno (r, φ) le coordinate polari di M nel piano xy nel senso elementare, poichè r è positivo e φ fra 0 e 2π. D'altra parte nel piano ZOM presi gli assi cartesiani ortogonali Oz, OM sono, z, r le coordinate cartesiane e ρ, θ le polari di P. Dunque si ha

---

(1) Si noti che θ è acuto o ottuso secondochè $z > 0$

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta\,, \qquad r = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde eliminando r, abbiamo

(13) $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = \rho\cos\theta$

formole che esprimono le coordinate cartesiane per le polari. Per le inverse basta scrivere

(14) $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\cos\theta = \frac{z}{\rho}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

dove i radicali per le convenzioni superiori si assumeranno positivi. Di qui si vede ancora che prendendo ρ positivo θ fra 0 e π e φ fra 0 e 2π, le (14), dato che sia il punto e quindi le sue coordinate cartesiane x, y, z, fissano perfettamente le coordinate polari ρ, θ, φ; così pure le (13) a dati valori di ρ, θ, φ fanno corrispondere un solo punto.

Senza ripetere qui le considerazioni analoghe a quelle già fatte per le coordinate polari nel piano (§17), basterà avvertire che quando si debbano considerare punti variabili nello spazio sarà più conveniente lasciare anche alle coordinate polari illimitata variabilità. Le formole che le legano alle cartesiane sono sempre le (13) e dati ρ, θ, φ resterà individuato il punto; invece ad un punto dato corrisponderanno infinite terne di valori per le coordinate polari

le relazioni di queste con una fissa $(\rho_0\ \theta_0\ \varphi_0)$ si desumono facilmente dalle (13) stesse, come date dalle formole seguenti

$$\rho=\rho_0\ ,\quad \theta=\theta_0+2n\pi\ ,\quad \varphi=\varphi_0+2m\pi$$
$$\rho=\rho_0\ ,\quad \theta=-\theta_0+2n\pi\ ,\quad \varphi=\varphi_0+(2m+1)\pi$$
$$\rho=-\rho_0\ ,\quad \theta=\theta_0+(2n+1)\pi\ ,\quad \varphi=\varphi_0+2m\pi$$
$$\rho=-\rho_0\ ,\quad \theta=-\theta_0+(2n+1)\pi\ ,\quad \varphi=\varphi_0+(2m+1)\pi,$$

dove m, n sono numeri interi qualunque.

§45"

Cenno di altri sistemi di coordinate

Come per il piano (cf §19) così anche qui per lo spazio ci contenteremo di accennare al principio generale su cui si basa la considerazione dei più generali sistemi possibili di coordinate nello spazio.

Nel sistema Cartesiano un punto P viene individuato dalle sue coordinate

$$x=x_0\ ,\quad y=y_0\ ,\quad z=z_0$$

come intersezione dei tre piani condotti per P parallelamente ai tre piani coordinati. Facendo assumere a P tutte le posizioni nello spazio ciascuno dei piani descrive un sistema (fascio) di

piani paralleli. Questi tre sistemi di superficie (piani) sono così costituiti che per ogni punto dello spazio passa una superficie di ciascuno dei tre sistemi ed il punto resta individuato come loro intersezione.

Nel sistema polare il dare il raggio vettore $\rho = \rho_0$ significa conoscere la distanza del punto dall'origine onde il punto trovasi sopra una determinata sfera col centro in O. Il dare $\theta = \theta_0$ significa conoscere il cono di rotazione attorno all'asse Oz contenente il punto. In fine dal valore $\varphi = \varphi_0$ resta individuato il piano che passa per Oz e pel punto. Variando P nello spazio abbiamo così ancora tre sistemi di superficie e cioè: 1° le sfere col centro in O, 2° i coni di rotazione attorno ad Oz, 3° i piani del fascio che ha per asse Oz. Ed ancora per ogni punto dello spazio passa una superficie di ciascuno dei tre sistemi ed il punto resta individuato come loro intersezione.

Dopo ciò si immaginino in generale un triplo sistema di superficie, di qualunque specie, così costituito che per ogni punto P dello spazio (o della regione di spazio che si considera) passi una sola superficie di ciascuno

dei tre sistemi e queste superfici, entro la regione considerata abbiano il solo punto P comune, questo risulterà individuato come loro intersezione. Facendo corrispondere a ciascuna superficie entro il suo sistema un parametro variabile, avremo così una terna di parametri i cui valori fissano il punto e se ne diranno le coordinate.

Per citare un solo altro esempio speciale diciamo delle <u>coordinate cilindriche</u>. Queste si ottengono dalle cartesiane ortogonali ritenendo per una delle tre coordinate la z e alle altre due x, y sostituendo le polari r, φ colle formole già sopra considerate

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\varphi .$$

Allora r, φ, z prendono il nome di <u>coordinate cilindriche</u> del punto. Qui il sistema triplo è sostituito 1° dai cilindri di rotazione attorno all'asse Oz $(r = r_0)$, 2° dai piani del fascio aventi per asse Oz $(\varphi = \varphi_0)$, 3° dai piani normali a quest'asse $(z = z_0)$.

Capitolo 5°

Equazioni delle superficie e delle curve. Equazioni lineari come rappresentanti piani

§ 46.

Superficie cilindriche

Nella geometria analitica del piano un'equazione fra le coordinate correnti (variabili) di un punto ci rappresentava una curva (§ 21). Andiamo ora a dare nello spazio la rappresentazione geometrica analoga per un'equazione, o pel sistema di due equazioni, che leghi le coordinate correnti di un punto (1). Vedremo che nel primo caso il luogo geometrico rappresentato è una superficie, nel secondo una curva.

---

(1) Un sistema di tre equazioni (indipendenti) fra le tre coordinate x, y, z non sarebbe soddisfatto che da un numero discreto di punti e non si avrebbe più un luogo geometrico.

Supponiamo dapprima che le coordinate x, y, z di un punto variabile siano assoggettate a soddisfare una determinata equazione

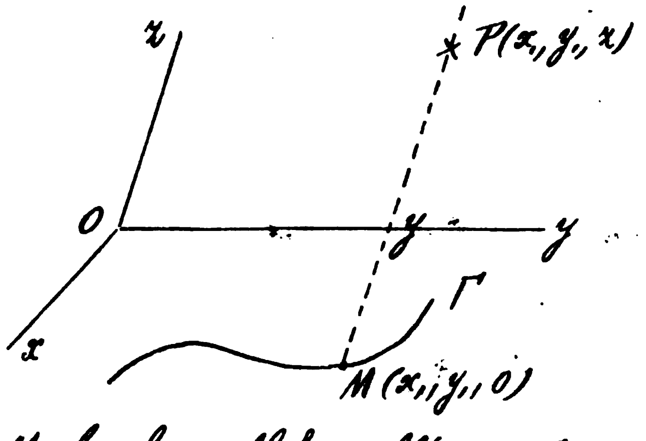
(1) $$f(x, y, z) = 0,$$

del resto di natura qualunque, e dimostriamo che il luogo di tutti i punti dello spazio che soddisfano (colle loro coordinate) la (1) sarà una superficie.

Cominciamo dal considerare un caso particolare. Può darsi che nella (1) manchi una delle tre variabili, poniamo la z e sia dunque

(2) $$f(x, y) = 0.$$

Il luogo di tutti i punti del piano xy che soddisfano la (2) sappiamo essere una certa curva Γ. Prendiamo dovunque su Γ un punto M e siano $x_1, y_1, 0$ le sue coordinate, onde avremo per ipotesi



(3) $$f(x_1, y_1) = 0.$$

Tiriamo per M la parallela all'asse Oz e sopra di essa prendiamo un punto qualunque P le cui coordi-

nale saranno

$$x_1,\ y_1,\ z.$$

Esse soddisfano ancora la (2) perchè, non contenendo questa la z, il risultato della sostituzione è il 1° membro della (3) che è nullo. Ora conducendo per ogni punto di Γ la parallela all'asse della z si forma una superficie cilindrica, parallela a quest'asse, che ha per base la curva Γ. Ne concludiamo che ogni punto di questa superficie cilindrica soddisfa la (2). Con eguale facilità si dimostra la proprietà inversa: ogni punto $P \equiv (x_1, y_1, z)$ le cui coordinate soddisfano la (2) è situato su questa superficie cilindrica. E invero se per P tiriamo la parallela all'asse Oz fino all'incontro in M col piano xy le coordinate di M saranno $x_1, y_1, 0$. Soddisfacendo P alla (2) ne risulta la (3), alla quale soddisfano le due prime coordinate di M. Dunque M è sulla curva Γ e conseguentemente P sulla detta superficie cilindrica.

Dunque: <u>Il luogo di tutti i punti dello spazio che soddisfano colle loro coordinate un'equazione della formola (2) è una superficie cilindrica parallela all'asse delle z.</u>

La (2) dicesi perciò l'equazione di que-

sia superficie cilindrica. Analogamente può nella (1) mancare la x o la y; in generale vediamo: Un'equazione (1) fra le coordinate di un punto variabile nello spazio in cui manchi una delle tre variabili rappresenta una superficie cilindrica parallela all'asse di cui manca nella (1) la variabile corrispondente.

Inversamente si vede subito che: Presa una qualunque superficie cilindrica, parallela p. e. all'asse delle z, l'equazione $f(x,y)=0$ della sua sezione col piano xy, interpretata nello spazio sarà l'equazione della superficie.

Esempio 1.° L'equazione lineare

$$ax+by+c=0$$

fra le due variabili x, y rappresenta nel piano xy una retta, nello spazio il piano condotto per questa retta parallelamente all'asse Oz.

2.° In assi coordinati ortogonali l'equazione $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ rappresenta un circolo, nello spazio rappresenta il cilindro circolare retto che ha per base questo circolo.

§ 47.

Equazione di una superficie

Veniamo ora al caso generale in cui nella (1) non manca alcuna delle variabili. Allora invece di cercare ad un tratto il luogo di tutti i punti dello spazio che soddisfano la (1) cerchiamo dapprima il luogo di questi punti che stanno sopra un determinato piano parallelo al piano xy. Tutti i punti di un tale piano hanno manifestamente la stessa ordinata $z = h$, e i punti richiesti sono quindi tutti e soli quelli che soddisfano colle loro coordinate il sistema

$$(a) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = h. \end{cases}$$

Ora questo sistema è perfettamente equivalente all'altro

$$(b) \qquad \begin{cases} f(x, y, h) = 0 \\ z = h \end{cases}$$

il quale la prima equazione rappresenta (§ prec.) la superficie cilindrica parallela all'asse delle z avente per base nel piano xy la curva Γ di equazione

$$(4) \qquad f(x, y, h) = 0$$

e la seconda, come si è detto, il piano considerato.
I punti che soddisfano il sistema (b) (ovvero il sistema equivalente (a)) sono dunque allogati sulla curva Γ' intersezione del cilindro e del piano. Si noti che le curve Γ, Γ' sono identiche di forma, come sezioni fatte in uno stesso cilindro con piani paralleli.

Notiamo che può benissimo darsi che pel valore considerato di <u>h</u> non esistano valori <u>reali</u> di x, y, z soddisfacenti al sistema b) (cioè valori reali di x, y soddisfacenti alla (4)); ma ciò non può avvenire per ogni valore di <u>h</u> che allora alla equazione (1) non si potrebbe soddisfare con valori reali di x, y, z e non esisterebbe un luogo reale di punti corrispondenti, caso che sebbene analiticamente possibile escludiamo per ora non avendo per noi dall'attuale punto di vista reale, interesse alcuno. Ed anzi, perchè si possa parlare di un effettivo luogo reale, converrà che i valori di <u>h</u> pei quali la curva Γ è reale, non formino una serie discreta ma riempiano tratti continui.

Ciò premesso facciamo ora variare <u>h</u> con continuità. La curva Γ' corrispondente varierà

con continuità dipendentemente dal parametro h contenuto nella (4). Il luogo di questa curva Γ mobile nello spazio e variabile al tempo stesso di forma con legge continua sarà una superficie (cf. le avvertenze al § 21).

Questa superficie S è, come subito si vede, l'insieme di tutti e soli i punti dello spazio che soddisfano la (1); questa dicesi perciò l'equazione della superficie S.

Inversamente presa una superficie qualunque S dello spazio, generata con determinata legge, consideriamo un suo punto variabile $P \equiv (x, y, z)$. Le coordinate x, y, z di P sono insieme variabili, ma se si fissano p. e. i valori di x, y, diciamo $x = x_0$, $y = y_0$ i corrispondenti di z formano la serie discreta di valori corrispondenti alle ordinate dei punti ove la retta parallela all'asse Oz ed uscente dal punto $(x_0\, y_0\, 0)$ seque la superficie.

È dunque z una determinata funzione di x, y: $z = \varphi(x, y)$ la cui natura dipende dalla natura della superficie. Dunque: Ogni superficie generata con determinata legge, ha una corrispondente equazione.

Nel ragionamento precedente si è supp-

posto che le parallele all'asse Oz incontrino la S solo in punti formanti una serie discreta. In caso contrario la S sarebbe un cilindro parallelo all'asse Oz e sappiamo già dal §. prec. che avrebbe un'equazione della forma

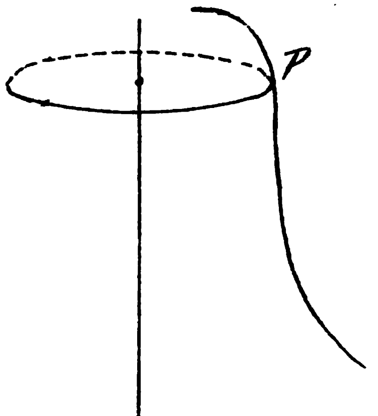
$$f(x, y) = 0.$$

§ 48„

Superficie di rotazione

Come primo esempio di equazioni di superficie trattiamo delle <u>superficie</u> <u>di</u> <u>rotazione</u>.

Si indica con tal nome la superficie S generata dal rotare di una curva qualunque



Γ dello spazio attorno ad una retta fissa r (asse). In questo movimento ogni punto P della curva Γ descrive un circolo situato nel piano per P normale all'asse e col centro sull'asse. Questo circolo dicesi un <u>parallelo</u> della superficie S, e la S è evidentemente il luogo di tutti i suoi paralleli. Tracciata sulla superficie S un'altra curva qualunque Γ' (che ne incontri

tutti i paralleli) la rotazione di Γ intorno all'asse genera ancora la stessa superficie giacchè i vari punti di Γ descrivono ancora (tutti) i paralleli di S. Un piano condotto per l'asse taglia la superficie S secondo una curva C che dicesi il meridiano di S, e rotando il meridiano intorno all'asse genera l'intera superficie.

Naturalmente tutti i meridiani sono identici di forma e per definire perfettamente la superficie basterà dare l'asse e la curva meridiana.

Si può anche dire: una superficie di rotazione è il luogo di un circolo mobile il cui centro percorre una retta (asse) rimanendo il piano del circolo normale all'asse e variando il raggio del circolo con legge continua arbitraria. Invero sopra un piano fisso per l'asse il punto d'incontro col circolo mobile descriverà una curva (meridiano) che per rotazione attorno all'asse genererà la superficie.

Ciò premesso, supponiamo gli assi Cartesiani ortogonali e consideriamo un'equazione della forma

$$(5)\qquad \sqrt{x^2+y^2} = f(z)$$

dove f è simbolo di una funzione arbitraria,

che si può anche scrivere

$$(5^*) \qquad x^2+y^2=F(z) \qquad (F=f^2).$$

Dimostriamo che: la superficie rappresentata da una tale equazione (5) è una superficie di rotazione attorno all'asse Oz.

Se intersechiamo infatti la superficie con un piano $z=h$ normale all'asse Oz i punti della linea comune soddisfano colle loro coordinate il sistema di equazioni

$$x^2+y^2=F(z), \quad z=h$$

ovvero l'equivalente

$$x^2+y^2=f^2(h), \quad z=h.$$

Ma la prima $x^2+y^2=R^2 \,(R=f(h))$ rappresenta (§ 46) un cilindro circolare retto che ha per asse l'asse Oz e il raggio $R=f(h)$; dunque la detta linea è un circolo in un piano perpendicolare all'asse Oz e col centro su questo. La superficie descritta dal circolo al variare di h è dunque, per quanto si è detto sopra, una superficie di rotazione, c. d. d.

Nella superficie di rotazione rappresentata dalla (5) la curva meridiana, p. e. nel piano xz, ha evidentemente l'equazione

$$x=f(z)$$

che si ottiene dalla (5) facendovi $y=0$. Stante

l'arbitrarietà della funzione $f(z)$, questa curva meridiana può avere una forma qualunque, onde concludiamo: <u>Qualunque superficie di rotazione attorno all'asse Oz ha un'equazione della forma (5)</u>.

"§ 49"

Sfere e cono di rotazione

Come esempi di equazioni di superficie cerchiamo .

1° <u>l'equazione della sfera</u>. Supponiamo dapprima gli assi ortogonali e siano a, b, c le coordinate del centro, R il raggio della sfera. Esprimendo che ogni punto (x, y, z) della superficie sferica dista dal centro (a, b, c) appunto di una lunghezza $= R$, otteniamo l'equazione della sfera

$$(6)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Inversamente ogni equazione di questa forma, in assi ortogonali, rappresenta una sfera. Se gli assi sono obliqui, per la formola (9) § 41 che dà la distanza di due punti, l'equazione della sfera assumerà la forma più complicata:

$$(6^*)\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(x-a)(y-b)\cos\gamma+2(y-b)(z-c)\cos\alpha+2(x-a)(z-c)\cos\beta.$$

2° Consideriamo un cono di rotazione col vertice

nell' origine e, supposti gli assi ortogonali, definiamo il cono dando i coseni di direzione a_1, a_2, a_3 del suo asse e l'angolo d'apertura θ del cono al vertice, cioè l'angolo che la generatrice mobile del cono forma coll'asse. Per trovare l'equazione del cono osserviamo che preso un suo punto qualunque (x, y, z) i coseni di direzione della generatrice che passa per questo punto sono dati da

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

e l'asse del cono avendo i coseni di direzione

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

avremo

$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm \cos\theta,$$

onde quadrando si avrà per l'equazione del cono

$$(7) \qquad (a_1 x + a_2 y + a_3 z)^2 = \cos^2\theta\,(x^2+y^2+z^2).$$

P. e. se l'asse del cono è l'asse delle z, avremo

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1$$

e l'equazione del cono diventa

$$x^2 + y^2 = tg^2\theta \cdot z^2.$$

Essa è naturalmente della forma (5) e la curva meridiana nel piano $x\,z$ ha per equa-

zione

$$x^2 - tg^2\theta\, z^2 = 0$$

o

$$(x - tg\theta\, z)(x + tg\theta\, z) = 0;$$

si sdoppia quindi, come è chiaro geometricamente in due rette simmetriche rispetto all'asse ed inclinate su questo dell'angolo θ.

§ 50

Equazioni delle curve nello spazio

Ritornando alle considerazioni generali, invece di una sola equazione fra le tre coordinate correnti, prendiamo ora il sistema di due tali equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

ciascuna delle quali rappresenta per sè una superficie, diciamo la prima una superficie S_1, la seconda una superficie S_2. Queste due superficie si taglieranno in generale lungo una certa curva Γ (1), ed ogni punto di Γ soddi-

(1) Perchè ciò sia esatto deve sottintendersi che S_1, S_2 non abbiano una parte superficiale

sfera colle sue coordinate ad ambedue le equazioni (8). Viceversa se un punto soddisfa al sistema (8), esso sta tanto sulla S_1 quanto sulla S_2 e però sulla loro linea d'intersezione Γ. Dunque: il luogo dei punti dello spazio che soddisfano a due equazioni simultanee (8) fra le tre coordinate è una curva[1].

Viceversa, presa una curva arbitraria Γ, se facciamo passare per Γ due superficie S_1, S_2, che non abbiano altri punti a comune fuori di Γ, e sono $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$ le equazioni separate di S_1, S_2, il sistema simultaneo (8) ci rappresenterà perfettamente la curva Γ. Diremo per ciò che: le (8) sono le equazioni della curva Γ.

È manifesto che le equazioni di una curva Γ nello spazio non sono per sè determinate, ogni coppia di superficie (S_1, S_2) nelle condizioni[1] sopra descritte dando luogo ad un sistema (8) che può assumersi come quello delle equazioni della curva[1]. Algebricamente ogni

---

[1] comune, cioè algebricamente che non esista[1] una equazione $\varphi(x,y,z)=0$ tale che i valori di x, y, z che la soddisfano annullino tanto f_1 quanto f_2.

altro sistema

$$(8^*) \qquad F_1(x,y,z)=0, \quad F_2(x,y,z)=0,$$

che sia equivalente al sistema (8)[1] può sostituirsi al sistema (8), p. e. il sistema seguente

$$f_1(x,y,z)=0 \quad f_1(x,y,z)+c f_2(x,y,z)=0$$

essendo c una costante qualunque non nulla.

In generale osserviamo che qualunque equazione

$$(9) \qquad F(x,y,z)=0$$

la quale sia una conseguenza del sistema (8) rappresenterà una superficie Σ che passa per la curva Γ, perchè ogni punto di Γ soddisfacendo al sistema (8) soddisfa anche la (9) che ne è una conseguenza. Un caso particolare merita di essere notato. Coi processi dell'algebra (più in generale dell'analisi) possiamo eliminare fra le due equazioni (8) una delle variabili p. e. z e formare un'equazione risultante in x, y

$$(10) \qquad \varphi(x,y)=0$$

che è naturalmente una conseguenza delle (8).

---

(1) Tale cioè che tutti i valori di x, y, z che soddisfano al sistema (8) soddisfano anche (8*) ed inversamente.

La (10) rappresenta nello spazio una superficie cilindrica parallela all'asse z (§ 46) che passa, per quanto si è detto sopra, per la curva Γ ed è quindi il cilindro che si forma conducendo pei punti di Γ le parallele all'asse Oz. Nel piano x, y la (10) rappresenta dunque la projezione della curva Γ fatta sul piano x y parallelamente all'asse delle z.

In generale vediamo adunque che: se fra le due equazioni di una curva Γ nello spazio eliminiamo una delle tre variabili l'equazione ottenuta, rappresenta la superficie cilindrica che projetta la curva parallelamente all'asse che corrisponde alla variabile eliminata.

§ 51.

Equazioni parametriche di una curva.

Molte volte invece di rappresentare una curva nello spazio mediante due equazioni simultanee nelle coordinate x, y, z conviene esprimere le coordinate di un punto mobile sulla curva in funzione di una variabile ausiliaria t (parametro).

Ripetendo considerazioni affatto analoghe a quelle svolte nel § 22 per le curve piane vediamo in effetto che si pone

(11) $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$

e si suppongano f_1, f_2, f_3 funzioni continue di t il punto (x, y, z) al variare continuo di t si muoverà con continuità nello spazio e descriverà una curva Γ. Se si elimina t p. e. fra le due prime equazioni (11) si formerà l'equazione della superficie cilindrica che projetta la curva Γ parallelamente all'asse Oz. Così, eliminando invece t fra le due ultime, si avrà la superficie cilindrica che projetta la curva parallelamente all'asse Ox. E se questi due cilindri non avranno alcuna altra parte a comune oltre Γ, potremo assumere le loro due equazioni come equazioni della curva.

Per altro è da osservarsi che le eliminazioni indicate, teoricamente sempre possibili, possono talora essere praticamente ineseguibili.

Nonostante, le (11) ci rappresentano sempre una determinata curva dello spazio le cui proprietà si potranno studiare direttamente per mezzo della rappresentazione analitica data colle (11) alla curva.

Per dare un esempio di questo modo di rappresentazione parametrica di una curva prendiamo la così detta <u>elica circolare</u> la quale si genera nel modo seguente. Immaginiamo che attorno ad un asse fisso r nello spazio si faccia rotare, di moto uniforme, una retta parallela r' e su questa scorra intanto un punto M ancora di moto uniforme; la curva generata da M dicesi appunto elica (circolare). È chiaro che la retta r' descrive un cilindro circolare retto sul quale l'elica è descritta; svolgendo il cilindro in un piano si vede facilmente che l'elica si distende secondo una retta. Per rappresentare analiticamente l'elica prendiamo l'asse fisso r per asse Oz e, considerato il punto mobile M sulla retta r' in una posizione iniziale A, assumiamo per asse delle $\underline{x}$ la perpendicolare calata da A sopra Oz, infine per l'asse delle y prendiamo la normale ad Ox, Oz. Se diciamo R la distanza di r' da r (raggio del cilindro) e x, y, z le coordinate di M ad un istante qualunque, l'elica sarà rappresentata dalle equazioni

$$(12) \qquad x = R\cos\theta\,, \quad y = R\operatorname{sen}\theta\,, \quad z = k\theta\,,$$

dove θ indica un parametro variabile e $\underline{k}$ una costante (il rapporto della velocità di traslazione

e quello di rotazione).

L'elica, come la retta ed il cerchio, è sovrapponibile a sè stessa in ogni sua parte, come è intuitivo geometricamente osservando che se si dà a tutta l'elica il movimento stesso che l'ha generata essa striscia sopra sè stessa.

Analiticamente risulta dalle (11) osservando che se si aumenta θ di una costante α le coordinate x, y, z diventano

$$x' = \cos\alpha \,.\, x - \operatorname{sen}\alpha \,.\, y, \quad y' = \operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y, \quad z' = z + R\alpha$$

formole che corrispondono ad una rotazione degli assi coordinati attorno ad Oz dell'angolo α insieme con una traslazione d'ampiezza $R\alpha$ lungo Oz.

Osserviamo le projezioni ortogonali della elica sui piani coordinati. Eliminando θ fra le prime due (11) si ottiene

$$x^2 + y^2 = R^2$$

e la projezione dell'elica sul piano xy è quindi un cerchio, come a priori è prevedibile. Se eliminiamo θ fra la seconda e la terza (11) abbiamo

$$y = R \operatorname{sen}\left(\frac{z}{R}\right);$$

dunque sopra un piano per l'asse l'elica si

projetta secondo una curva sinusoidale.

In fine dividendo la 2.ª delle (11) per la 1.ª e paragonando colla 3.ª otteniamo

$$(13) \qquad \frac{y}{x} = tg\left(\frac{z}{k}\right),$$

che è l'equazione della superficie luogo delle normali calate dai punti dell'elica sull'asse, la così detta elicoide rigata ad area minima. (1)

"§ 52"

Superficie algebriche e trascendenti

Ritorniamo alle superficie in generale. Come le curve piane, così le superficie nello spazio si distinguono in algebriche e trascendenti. Dicesi algebrica una superficie quando la

---

(1) La sezione della superficie (13) con un piano qualunque $z = h$ normale all'asse ha infatti le equazioni

$$y = tg\left(\frac{h}{k}\right) \cdot x, \quad z = h$$

ed è quindi una retta normale all'asse Oz (appoggiata all'elica).

sua equazione in coordinate cartesiane x, y, z è, o si può ridurre ad essere, razionale ed intera nelle coordinate; diciamo:

$$(14) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

dove f è razionale ed intera in x, y, z. Ogni superficie non algebrica dicesi trascendente. Così p. e. una superficie cilindrica sarà algebrica o trascendente secondo che è algebrica o trascendente la sua sezione retta, o qualunque altra sua sezione piana.

In una superficie algebrica dicesi grado il grado dell'equazione (14) che la rappresenta. P. e. la sfera ed il cono di rotazione (§ 49) sono superficie algebriche di 2° grado; l'elicoide rigata ad area minima (13) è una superficie trascendente. Affatto analogamente come per le curve dipendentemente dalla circostanza che le formole di trasformazione degli assi sono date da sostituzioni lineari ed intere, si vede che il grado m di una superficie algebrica è indipendente dagli assi a cui la superficie si riferisce.

Il significato geometrico del grado di una superficie algebrica risulta dall'uno o dall'altro dei teoremi seguenti:

1° Un piano arbitrario dello spazio taglia

una superficie algebrica di grado m secondo una curva algebrica di grado m.

2° Una retta arbitraria dello spazio (che non giaccia eventualmente per intero sulla superficie) incontra una superficie di grado m precisamente in m punti fra reali ed immaginari.

In questo caso elementare non dovremo occuparci che delle superficie dei primi due gradi. Quelle di 1° grado non sono altro, come ora dimostreremo, che i piani dello spazio. Allo studio delle superficie di 2° grado (quadriche) sarà dedicata la parte terza del corso).

§ 53.

Equazione lineare come rappresentante un piano

Ci vogliamo ora occupare della interpretazione geometrica delle equazioni lineari nelle coordinate cartesiane. Già sopra, dal significato geometrico di grado di una superficie algebrica, abbiamo dedotto che ogni superficie di 1° grado è un piano, ovvero:

a) Un'equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{14}$$

delle coordinate cartesiane rappresenta un piano.

Poichè invero un tale luogo geometrico gode della proprietà caratteristica delle superficie piane che una retta la quale abbia due punti sulla superficie vi giace per intero. La stessa cosa possiamo dedurre nel modo seguente. Siano $P_1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2 z_2)$ due punti qualunque del luogo (14), onde avremo

$$(15) \qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \end{cases}$$

Se P è un punto qualunque della congiungente $P_1 P_2$ le coordinate di P saranno date dalle (1) § 34

$$(16) \qquad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n},$$

ove sia $\frac{m}{n}$ il rapporto secondo cui P divide il segmento $P_1 P_2$. Ora sostituendo i valori (16) di x, y, z nella (14), tenendo conto delle (15), si vede subito che essi la soddisfano e per ciò P appartiene al luogo c. d. d.

Un'altra dimostrazione del teorema a) si può trarre dalle formole di trasformazione delle coordinate. In primo luogo, siccome un'equazione lineare resta lineare comunque si cangino gli assi (§ prec.) basterà limitarsi a dimostrare

il teorema a) nell'ipotesi di assi cartesiani ortogonali. Se nella (14) mancasse una delle tre variabili p. e. la y, se fosse cioè $B=0$, allora la (14) rappresenterebbe un piano parallelo all'asse delle y (§ 46). Ora, con una trasformazione degli assi ortogonali, possiamo facilmente ridurre l'equazione generale (14) a questo caso particolare e cioè nel modo più semplice rotando il sistema coordinato di un conveniente angolo α attorno all'asse Oz. Le formole di trasformazione sono allora

$$x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \quad y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha, \quad z = Z.$$

e la (14) si muta nei nuovi assi nell'equazione

$$(14^*) \quad (A\cos\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha)X + (B\cos\alpha - A\,\mathrm{sen}\,\alpha)Y + CZ + D = 0,$$

e se prendiamo α in guisa che sia

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{B}{A}$$

la (14*) non conterrà più la Y come si voleva.

Ancora servendosi delle formole di trasformazione, possiamo dimostrare il teorema inverso:

b) Ogni piano π ha un'equazione lineare nelle coordinate cartesiane.

Trasformando gli assi, possiamo infatti prendere il piano π per nuovo piano XY, onde per ogni suo punto sarà $Z=0$. Ma Z è in ...

funzione lineare intera delle antiche coordinate, diciamo:

$$Z = Ax + By + Cz + D;$$

l'equazione di π nelle antiche coordinate ha dunque la forma (14), c. d. d.

Dimostrate così le proprietà fondamentali a) b), osserviamo alcuni casi particolari notevoli nell'equazione del piano, corrispondenti all'annullarsi di qualcuno dei coefficienti.

1° Se annullandosi D l'equazione è

$$Ax + By + Cz = 0$$

il piano passa per l'origine ed inversamente.

2° Se si annulla uno dei tre coefficienti A, B, C, il piano è parallelo al corrispondente asse coordinato.

3° Se si annullano due di questi, il piano è parallelo al piano coordinato che contiene i due assi corrispondenti; p. e. se $A = B = 0$ l'equazione diventa $z = \text{cost}^{te}$ e rappresenta un piano parallelo al piano xy.

§ 54.

Parallelismo di due piani

Supponiamo date le equazioni

$$(17)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

di due piani π, π' e cerchiamo a quali criterii si riconoscerà se i due piani sono paralleli. Possiamo ridurre la questione alla geometria piana osservando che per ciò sarà necessario e sufficiente che π, π' incontrino ciascun piano coordinato secondo due rette parallele. Ora le due rette secondo cui i piani (17) incontrano p. e. il piano $xy\,(z=0)$ hanno per equazioni

$$\begin{cases} Ax+By+D=0 \\ A'x+B'y+D'=0 \end{cases}$$

e sono quindi parallele allora soltanto quando sussiste la proporzione

$$A:B=A':B'$$

ossia quando è $AB'-A'B=0$ (§25). Lo stesso operando per gli altri due piani coordinati ne deduciamo:

<u>La condizione necessaria e sufficiente perchè due piani siano paralleli è che nelle loro equa-</u>

nioni siano proporzionali i coefficienti delle variabili:

$$A:B:C = A':B':C',$$

o in altre parole che si annullino i tre minori della matrice

$$(\alpha) \qquad \begin{Vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{Vmatrix}.$$

Si può dare il caso ulteriore che i due piani coincidano, e ciò avviene allora soltanto quando tutti i coefficienti dell'equazione dell'un piano sono proporzionali ai corrispondenti dell'altro:

$$A:B:C:D = A':B':C':D'$$

cioè quando si annullano tutti i minori di 2° ordine della matrice

$$(\beta) \qquad \begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{Vmatrix}.$$

E invero dalle considerazioni geometriche superiori risulta osservando che se π, π' coincidono debbono incontrare ciascun piano coordinato nella medesima retta, ed inversamente, se ciò avviene, coincidono. Algebricamente risulta da che, se i due piani coincidono, ogni punto dell'uno appartiene all'altro, cioè le sue equazioni (17) non debbono essere distinte.

Così pure, applicando i teoremi generali dell'algebra sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, possiamo nuovamente dedurre le condizioni di semplice parallelismo di due piani supposti distinti. I due piani, essendo distinti e paralleli, non debbono avere alcun punto comune a distanza finita, cioè non deve essere possibile, con valori finiti delle incognite x, y, z, soddisfare il sistema (17). L'Algebra ci dice che la matrice (α) deve avere per ciò caratteristica minore della (β). In questa, le due equazioni (17) essendo distinte, la caratteristica è 2; dunque debbono annullarsi i tre minori del 2° ordine della (α), come si è dedotto prima geometricamente.

Noi andiamo ora a trattare per l'equazione del piano una serie successiva di questioni che sono le analoghe di quelle trattate nel Cap. III, nei §§ da 27 a 32, per l'equazione della retta in geometria analitica piana. E la trattazione analitica procede, come il lettore osserverà, in perfetta analogia nei due casi, ciò che ci permette ora di abbreviare l'esposizione.

§ 55.
Punto d'incontro d'un segmento con un piano.

Proponiamoci il problema:
Data l'equazione di un piano

$$(18) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

e le coordinate di due punti $P_1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2 z_2)$, trovare le coordinate del punto P ove la congiungente $P_1 P_2$ incontra il piano.

Procedendo precisamente come nel caso analogo della geometria piana (§ 26), prendiamo per incognita il rapporto $\frac{m}{n}$ secondo cui il punto P divide il segmento $P_1 P_2$; per le coordinate di P avremo:

$$x = \frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \quad y = \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}, \quad z = \frac{m z_2 + n z_1}{m+n}.$$

Sostituendo nella (18) e risolvendo rapporto alla incognita $\frac{m}{n}$, troviamo:

$$(19) \qquad \frac{m}{n} = -\frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D},$$

formola che risolve il problema.

Ed ora senza ripetere tutte le considerazioni relative, le quali non differiscono dalle

analoghe al §26 che per l'aumento di una coordinata, noi deduciamo dalla (19) che i due punti P_1, P_2 si trovano dalla stesso parte del piano (18) o da parti opposte secondo che i due quadrinomii

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \,,\; Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

hanno lo stesso segno o segno contrario.

Ciò possiamo esprimere anche nel modo seguente:

Ogni piano $Ax + By + Cz + D = 0$ divide lo spazio in due regioni; in una di queste la funzione lineare

$$Ax + By + Cz + D$$

delle coordinate x, y, z di un punto della regione è costantemente positiva, nell'altra regione costantemente negativa e si annulla sul piano, che è la superficie di separazione fra le due regioni.

Ritornando alla formola (19), osserviamo ancora che la congiungente $P_1 P_2$ sarà parallela al piano quando sia

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D.$$

§ 56.

Equazione del piano per tre punti

Forma $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$

Quattro punti $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, $(x_4 y_4 z_4)$ dello spazio non stanno in generale in un piano. Perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che esista una equazione lineare

$$Ax+By+Cz+D=0$$

a cui soddisfano tutte quattro le terne di coordinate, che si possono cioè scegliere quattro costanti A, B, C, D, non tutte nulle, in guisa da soddisfare le quattro equazioni lineari ed omogenee in A, B, C, D:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \\ Ax_3+By_3+Cz_3+D=0 \\ Ax_4+By_4+Cz_4+D=0 \end{cases}$$

L'algebra ci dice quindi:

<u>Condizione necessaria e sufficiente perchè quattro punti $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, $(x_4 y_4 z_4)$ giacciano in un piano è che si annulli il determinante</u>

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Dopo ciò possiamo subito, date le coordinate di tre punti, scrivere l'equazione del piano che li contiene. Basta per ciò pensare il quarto punto $(x_4\, y_4\, z_4)$ variabile e sostituire alle sue coordinate quelle correnti. Così: L'equazione del piano che contiene i tre punti $\binom{P_1}{x_1\, y_1\, z_1}$, $\binom{P_2}{x_2\, y_2\, z_2}$, $\binom{P_3}{x_3\, y_3\, z_3}$ si scrive sotto forma di determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Ma qui dobbiamo fare un'avvertenza. Parlando del piano determinato dai tre punti P_1, P_2, P_3, noi abbiamo tacitamente supposto che i tre punti non siano in linea retta, altrimenti vi sono infiniti piani che li contengono. Per vedere quale circostanza analitica caratterizza questo caso nella nostra formula (20), osserviamo che se $P_1 P_2 P_3$ sono in linea retta le

loro tre projezioni su ciascuno dei tre piani coordinati fatte parallelamente agli assi sono pure allineate e viceversa. Ora le coordinate delle projezioni Q_1, Q_2, Q_3 di P_1, P_2, P_3 p. e. sul piano xy, fatte parallelamente all'asse della z, sono

$$(x_1 y_1 0), \quad (x_2 y_2 0), \quad (x_3 y_3 0),$$

e quindi $Q_1 Q_2 Q_3$ sono allineati se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e viceversa, analogamente dicasi per gli altri due piani coordinati. Di più, se $P_1 P_2 P_3$ sono in linea retta, essi stanno in un piano coll'origine e per ciò si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Così i tre punti P_1, P_2, P_3 sono allineati quando sono nulli i quattro minori di 3° ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

ed inversamente. In questo caso adunque la (20) non è più un' equazione ma si risolve in un'identità corrispondentemente al fatto che i tre punti $P_1 P_2 P_3$ non individuano più un piano.

Consideriamo ora un piano che non passi per l'origine nè sia parallelo ad uno degli assi e siano p, q, r i valori algebrici finito e diversi da zero, dei tre segmenti che il piano stacca sugli assi coordinati Ox, Oy, Oz. Il piano contiene i tre punti

$$(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$$

e la sua equazione si scrive quindi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia sviluppando e dividendo per $p\,q\,r$:

$$(21) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

forma dell'equazione del piano in cui sono posti in evidenza i segmenti p, q, r staccati

dal piano degli assi coordinati.

§ 57 Volume del tetraedro

La condizione perchè quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 siano in un piano si è trovata espressa dall'annullarsi del determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

formato colle coordinate dei quattro punti.

In generale il valore di questo determinante sta in una relazione notevole col volume del tetraedro (piramide triangolare) coi vertici nei quattro punti. Per trovare la formola in questione, che è l'analoga di quella che in geometria piana dà l'area del triangolo in funzione delle coordinate dei tre vertici, trasformiamo dapprima D nel determinante di 3° ordine

$$(22) \qquad D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Cangiamo ora il triedro coordinato $O(x, y, z)$ (che supponiamo in generale obliquo) in un nuovo triedro <u>ortogonale</u> $P_1(X, Y, Z)$, della solita orientazione, che abbia per nuova origine il punto P_1, per nuovo piano XY il piano $P_1P_2P_3$ e l'asse Z diretto positivamente dalla parte del quarto vertice P_4. Le formole di trasformazione delle coordinate saranno (§40)

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + x_1 \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z + y_1 \\ z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z + z_1 \end{cases}$$

e per le osservazioni al §40, sarà

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}$$

essendo sen Ω il seno del triedro coordinato $O(x, y, z)$.

Indicando con $(X_2\, Y_2\, Z_2)$, $(X_3\, Y_3\, Z_3)$, $(X_4\, Y_4\, Z_4)$ le nuove coordinate di P_2, P_3, P_4 avremo dalle (23)

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \alpha_1 X_2 + \beta_1 Y_2 + \gamma_1 Z_2, \quad y_2 - y_1 = \alpha_2 X_2 + \beta_2 Y_2 + \gamma_1 Z_2, \quad z_2 - z_1 = \alpha_3 X_2 + \beta_3 Y_2 + \gamma_3 Z_2 \\ x_3 - x_1 = \alpha_1 X_3 + \beta_1 Y_3 + \gamma_1 Z_3, \quad y_3 - y_1 = \alpha_2 X_3 + \beta_2 Y_3 + \gamma_1 Z_3, \quad z_3 - z_1 = \alpha_3 X_3 + \beta_3 Y_3 + \gamma_3 Z_3 \\ x_4 - x_1 = \alpha_1 X_4 + \beta_1 Y_4 + \gamma_1 Z_4, \quad y_4 - y_1 = \alpha_2 X_4 + \beta_2 Y_4 + \gamma_1 Z_4, \quad z_4 - z_1 = \alpha_3 X_4 + \beta_3 Y_4 + \gamma_3 Z_4 \end{cases}$$

e sostituendo nel valore (22) di D

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix}.$$

Ma pel modo come sono stati presi i nuovi assi si ha

$$Z_2 = Z_3 = 0\ , \quad Z_4 > 0\ ,$$

dunque

$$D \operatorname{sen} \Omega = Z_4 \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix} .$$

Ora se calcoliamo l'area Δ del triangolo $P_1 P_2 P_3$ riferendoci ai nuovi assi, abbiamo

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix} .$$

La precedente si scrive dunque:

$$D \operatorname{sen} \Omega = 2\Delta \,.\, Z_4\ ,$$

e poichè Z_4 è l'altezza del nostro tetraedro relativa alla base $P_1 P_2 P_3$ il secondo membro dell'ultima formola dà il sestuplo volume del tetraedro, che indichiamo con $6V$, attribuendo a V il segno di Δ. Si è così trovata la formola

$$(24) \qquad 6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} . \operatorname{sen} \Omega$$

che esprime il sestuplo del volume V del tetraedro coi vertici nei quattro punti $P_1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2 z_2)$, $P_3 \equiv (x_3 y_3 z_3)$, $P_4 \equiv (x_4 y_4 z_4)$

In questa formola (24) il fattore sen Ω è il seno dell'angolo triedro coordinato; se gli assi sono ortogonali è sen $\Omega = 1$ e resta semplicemente

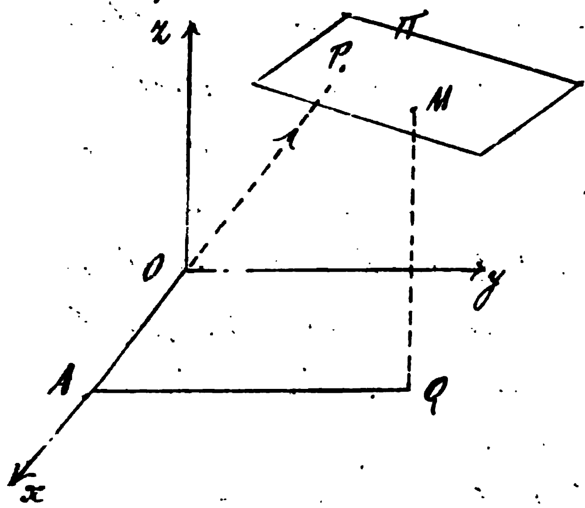
$$(24^*) \qquad 6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Si ricordi che in queste formole (24), (24*) viene attribuita al volume V del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ anche un segno, e precisamente il positivo se per un osservatore che percorra il perimetro $P_1P_2P_3$ del triangolo $P_1P_2P_3$ dalla parte interna del tetraedro l'area del triangolo rimane alla sinistra, il negativo nel caso contrario.

§ 58. Forma normale dell'equazione del piano

Come per la retta nel piano, così per il piano nello spazio vi ha una forma particolarmente importante dell'equazione del piano, la così detta forma normale. Questa si usa specialmente per assi ortogonali, quali noi qui li sup-

porremo. Per definire la posizione di un piano qualunque π nello spazio rispetto agli assi (ortogonali) $O(x, y, z)$ caliamo dall'origine la perpendicolare OP del piano che assumeremo diretta positivamente da O verso P. Sarà fissata la posizione di π quando si conoscano i coseni



$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$$

della direzione OP e la lunghezza p di questo segmento $\overline{OP}$ che sarà altresì il suo valore algebrico. Sul piano π assumiamo dovunque un punto $M \equiv (x, y, z)$ e costruiamo rispetto ad M la solita spezzata $OAQM$ tale che

$$\overline{OA} = x,\quad \overline{AQ} = y,\quad QM = z.$$

Projettando ortogonalmente la spezzata $OAQM$ e la sua resultante OM sopra OP, coll'osservare che la projezione di M cade in P, ne deduciamo

$$(25)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

A questa equazione soddisfano le coordinate di ogni punto M del piano; e viceversa se

$M \equiv (x, y, z)$ soddisfa la (25), M sta sul piano π perchè la sua projezione su OP cade in P. Così adunque la (25) è l'equazione del piano π. Come si vede, abbiamo per tal modo nuovamente dimostrato che ogni piano ha un'equazione lineare (25) in cui sono posti in evidenza i coseni di direzione della normale al piano e la distanza di questo dall'origine. Questa dicesi appunto l'equazione normale del piano.

Risolviamo ora il problema:

Data (in assi ortogonali) l'equazione generale

$$(26) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

di un piano ridurla a forma normale.

Perchè le (25), (26) rappresentino lo stesso piano occorre e basta (§ 54) che siano proporzionali i loro coefficienti. Indicando dunque con k un fattore di proporzionalità, dovremo avere

$$A = k\cos\alpha, \quad B = k\cos\beta, \quad C = k\cos\gamma, \quad D = -kp$$

Quadrando e sommando le prime tre, a causa di $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ si ottiene

$$k^2 = A^2 + B^2 + C^2; \quad k = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

indi per le formole richieste

$$(27)\quad \cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$(27^*)\quad p = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

dove si debbono prendere o i segni superiori o gli inferiori insieme. L'ambiguità nella scelta viene tolta dall'osservare che, per le nostre convenzioni, p è positivo; dunque bisogna prendere i segni superiori se il termine noto D è negativo, gli inferiori se è positivo. Resta l'ambiguità se $D=0$, e ciò è naturale perchè allora il piano passa per l'origine e le nostre convenzioni non fissano allora il senso positivo della sua normale.

"§ 59."

Distanza di un punto da un piano e angolo di due piani

Colle formole (27), (27*) risolviamo facilmente i due problemi analoghi a quelli che nella geometria piana abbiamo risoluto ai §§ 31, 32.

1° Problema:

Data l'equazione di un piano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(in assi ortogonali) e le coordinate di un punto $P_1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, calcolare la distanza δ di P_1 del piano.

La formola (27*) risolve il problema nel caso che il punto P_1 cada sull'origine. Per trovare anche qui la formola generale basta applicare una traslazione degli assi trasportando l'origine in P_1 colle formole

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1, \quad z = Z + z_1.$$

La nuova equazione dello stesso piano diventa

$$AX + BY + CZ + (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0,$$

onde applicando la (27*) avremo

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Se dapprima contiamo δ solo in valore assoluto dobbiamo fra i due segni del secondo membro scegliere quello che concorda col segno del quadrinomio $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$; ma se invece come è più opportuno conputiamo le distanze dei punti del piano come positive o negative secondo che il punto trovasi

da una parte del piano o dall'altra, basta ricordare quanto si è visto alla fine del § 55 rispetto al significato del segno del quadrinomio $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$, per concluderne che la formola per la distanza si scriverà

$$(28) \qquad \delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

lasciando al radicale sempre lo stesso segno, quando si applica la formola a punti diversi. In particolare se nella (28) daremo al radicale il segno di D verremo a riguardare come ragione delle distanze positive quella in cui giace l'origine.

La formola (28) è di continuo uso in geometria analitica ed è bene enunciarla in parole:

Per avere la distanza di un punto da un piano (assi ortogonali) basta sostituire nel primo membro della equazione del piano le coordinate del punto e dividere il resultato per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti x, y, z nella equazione stessa.

Si noti il caso particolare della formola (28) relativa al caso che l'equazione del piano sia scritta sotto forma normale

$$p - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma = 0;$$

allora si ha

$$(28^*) \qquad \delta = p - x_1\cos\alpha - y_1\cos\beta - z_1\cos\gamma.$$

2° Problema

Date le equazioni di due piani

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

(in assi ortogonali) calcolare l'angolo θ d'inclinazione dei due piani.

Preciseremo il modo come contiamo θ calando dall'origine O le perpendicolari ai due piani dirette dall'origine verso il piano e prendendo per θ l'angolo (fra 0 e π) di queste due direzioni positive.

Chiamando

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\ ;\ \cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'$$

i coseni delle due direzioni, abbiamo dalle (27)

$$(29)\left\{\begin{array}{lll} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\alpha' = \dfrac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, & \cos\beta' = \dfrac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, & \cos\gamma' = \dfrac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \end{array}\right.$$

dove, per le (27), i rispettivi segni dei due radicali saranno opposti ai corrispondenti dei termini noti D, D'; e se supponiamo, come è lecito, scritte

le due equazioni in guisa che D, D' siano negativi, daremo ad ambedue i radicali nelle (29) il segno positivo. Dalle (29) si hanno subito le formole (§ 36, (II), (II*))

$$(30)\qquad \cos\theta = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

$$(30^*)\qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}\begin{Vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{Vmatrix}^2$$

In particolare si osservi: Affinchè i due piani

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

siano fra loro ortogonali deve aversi

$$AA'+BB'+CC'=0$$

§ 60. Fascio di piani

Due piani distinti

$$(31)\qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

individuano un fascio di piani cui appartengono. Come si scrive l'equazione di un terzo piano qualunque di questo fascio?

Se combinando linearmente le due equazio-

ni (31), scriviamo la terza

(32) $\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D'=0$,

questa, per qualunque sistema di valori dati di moltiplicatori λ, μ (o meglio per qualunque rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$), rappresenterà sempre un piano del fascio. E infatti se i due piani (31) non sono paralleli, le coordinate di ogni punto della loro retta comune soddisfano le (31), quindi la (32), onde il piano (32) appartiene al fascio. Se poi i due piani (31) sono paralleli si ha

$$A:B:C=A':B':C',$$

quindi anche

$$A:B:C=\lambda A+\mu A':\lambda B+\mu B':\lambda C+\mu C',$$

cioè anche il terzo piano (32) è parallelo ai due primi ed appartiene dunque al loro fascio.

È facile poi vedere che l'equazione di qualsiasi piano del fascio può porsi sotto tal forma (32), poichè preso ad arbitrio un punto $(x'\,y'\,z')$ dello spazio basterà assumere nella (32) λ, μ in guisa che sia

$$\lambda(Ax'+By'+Cz'+B)+\mu(A'x'+B'y'+C'z'+D')=0$$

ed il piano (32) viene allora a passare pel punto $(x'\,y'\,z')$.

Affinchè un terzo piano

$$A''x+B''y+C''z+D''=0$$

appartenga al fascio dei due piani (31) è adunque necessario e sufficiente che si possano determinare λ, μ in guisa che ne risultino le identità

(33) $A'' = \lambda A + \mu A'$, $B'' = \lambda B + \mu B'$, $C'' = \lambda C + \mu C'$, $D'' = \lambda D + \mu D'$

Ne segue che la caratteristica della matrice

$$a) \quad \left\| \begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{matrix} \right\|$$

è eguale a 2 poichè sono nulli tutti i minori del 3° ordine della matrice, ma non tutti quelli del 2°, altrimenti i tre piani coinciderebbero (§ 54).

Viceversa se la matrice a) ha la caratteristica 2 sussistono identità della forma (33) ed i tre piani appartengono ad un fascio.

Concludiamo adunque:

<u>Affinchè tre piani</u>

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

<u>non coincidenti appartengono ad un fascio è necessario e sufficiente che la matrice dei coefficienti a) sia di caratteristica = 2.</u>[1]

(1) Se i tre piani coincidono la matrice è di carat-

§ 61.

Stella di piani

Tre piani:

$$(34)\quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \end{cases}$$

non appartenenti ad un fascio, individuano una stella di piani. La matrice dei coefficienti

$$\left\| \begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{matrix} \right\|$$

deve quì avere la caratteristica $\underline{3}$ e secondo che il determinante

$$\left| \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix} \right|$$

è diverso da zero ovvero nullo il centro della stella è a distanza finita (o all'infinito i tre piani sono paralleli ad una stessa retta). E infatti nel primo caso il sistema di equazioni lineari (34) è soddisfatto da valori finiti delle incognite, nel

---

teristica = 1 e viceversa

scindo non si può soddisfare con valori finiti.(1)

Se combinando linearmente le tre equazioni (34), scriviamo la quarta equazione

(35) $\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')+\nu(A''x+B''y+C''z+D'')=0$

questa per qualunque sistema di valori dati ai moltiplicatori λ, μ, ν (o meglio ai loro rapporti $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$) rappresenterà un piano della stella. E infatti, se i tre piani (34) non sono paralleli ad una stessa retta, il punto a distanza finita comune ai tre piani ha coordinate che verificano tutte tre le (34) e quindi anche le (35). Nell'altro caso sono nulli tutti i minori del 3° ordine nella matrice

---

(1) In altro modo così: Quando $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$ si possono trovare valori non tutti nulli per le incognite x_1, y_1, z_1 tali che si abbia

$$\alpha)\quad \begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1=0 \\ A'x_1+B'y_1+C'z_1=0 \\ A''x_1+B''y_1+C''z_1=0. \end{cases}$$

La retta che congiunge l'origine (0, 0, 0) al punto (x_1, y_1, z_1) è allora parallela a tutti tre i piani (per l'osservazione in fine al § 65).

$$\begin{Vmatrix} \lambda A+\mu A'+\nu A'', & \lambda B+\mu B'+\nu B'', & \lambda C+\mu C'+\nu C'' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{Vmatrix}$$

e però anche il 4° piano (35) è parallelo alla retta a cui sono paralleli i tre piani (34)[1]

Dimostriamo ora che l'equazione di qualsiasi piano della stella può porsi sotto la forma (35). E infatti se $A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0$ è l'equazione di un tale piano ed il centro della stella è a distanza finita le sue coordinate debbono soddisfare oltre che alle (35) anche a questa quarta equazione ed è quindi zero il determinato

$$b) \quad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}$$

cioè la quarta equazione è una combinazione lineare delle prime tre. Se poi il centro della stella è all'infinito cioè i quattro piani sono paralleli ad una retta sono nulli tutti i minori

---

(1) In altro modo dalla nota precedente osservando che le x_1, y_1, z_1 che soddisfano le α) soddisfano anche l'altra $(\lambda A+\mu A'+\nu A'')x_1+(\lambda B+\mu B'+\nu B'')y_1+(\lambda C+\mu C'+\nu C'')z_1=0$

di 3° ordine nella matrice ottenuta togliendo dal determinante b) l'ultima colonna (1); onde è nullo il determinante e vale la conclusione stessa.

In generale quattro piani dati ad arbitrio non appartengono ad una stella; perchè ciò sia è necessario e sufficiente che fra i primi membri delle loro equazioni passi una relazione lineare, cioè che si annulli il determinante b) formato coi loro coefficienti.

---

(1) Se la direzione all'infinito del centro della stella è quella che congiunge l'origine al punto (x_1, y_1, z_1) debbono sussistere le equazioni (cf nota precedente):

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0 \\ A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 = 0 \\ A''x_1 + B''y_1 + C''z_1 = 0 \\ A'''x_1 + B'''y_1 + C'''z_1 = 0 \end{cases}$$

e per ciò la matrice considerata nel testo deve avere caratteristica < 3.

Capitolo 6.°

Equazioni della retta nello spazio e problemi relativi.

§ 62.

Equazioni generali della retta ed equazioni ridotte

Per rappresentare una linea retta nello spazio, secondo quanto abbiamo detto in generale al § 50 per una linea qualunque, il modo più semplice sarà evidentemente di considerare la retta come intersezione di due piani. E così due equazioni simultanee lineari fra le coordinate:

$$(1) \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

che siano fra loro indipendenti (cioè tali che la matrice

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{Vmatrix}$$

abbia caratteristica 2) ci daranno la rappresentazione analitica di una retta dello spazio.

Naturalmente la retta (1) potrà ugual-

mente rappresentarsi col sistema di altre due equazioni lineari equivalente ad (1), che siano cioè combinazioni lineari indipendenti delle (1). Geometricamente ciò equivale a sostituire ai due dei piani per la retta altri due piani (distinti) del medesimo fascio. Notiamo che se i due piani

$$Ax+By+Cz+D=0\ ,\ A'x+B'y+C'z+D'=0$$

fossero paralleli, se cioè fossero nulli i tre minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{Vmatrix},$$

la retta sarebbe a distanza infinita. Generalmente qui supporremo invece che la retta considerata sia a distanza finita e perciò che uno almeno di quei tre minori non sia nullo. Se supponiamo p. e.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = AB'-A'B \neq 0,$$

potremo risolvere il sistema (1) rispetto ad x, y e lo scriveremo allora sotto la forma

$$(2)\qquad \begin{cases} x = mz+a \\ y = nz+b \end{cases}$$

dove m, n, a, b sono quattro costanti. Per equazioni della retta in luogo delle (1) possiamo in tal caso prendere il sistema <u>equivalente</u> del-

le equazioni (2); queste diconsi le <u>equazioni ridotte</u> della retta. I due piani (2) sono evidentemente quelli che passano per la retta e sono rispettivamente paralleli l'uno all'asse Oy l'altro all'asse Ox.

Perchè possano assumersi a definire la retta occorre e basta che siano distinti, ossia che <u>la retta non sia parallela al piano xy</u>. La stessa cosa vediamo osservando che se fosse

$$AB' - A'B = 0$$

moltiplicando la 1.ª delle (1) per B' la seconda per B e sottraendo si eliminerebbero insieme x ed y e l'equazione risultante, che rappresenta un piano per la retta, assumerebbe la forma $z = \text{cost}^{te}$ sarebbe cioè l'equazione di un piano parallelo al piano xy. Così: <u>perchè le equazioni di una retta possano scriversi sotto la forma ridotta (2) è necessario e basta che la retta non sia parallela al piano xy.</u>

Quando invece la retta (a distanza finita) fosse parallela al piano xy, potremmo scriverne ancora le equazioni ridotte rispetto ad uno degli altri piani coordinati, poniamo rispetto al piano yz p. e così:

$$(3) \quad \begin{cases} y = mx + n \\ z = c \end{cases}.$$

Cerchiamo ora quale è il significato geometrico dei quattro coefficienti m, n, a, b nelle equazioni ridotte della retta. Si trova subito quello di a, b osservando che le (2) facendovi $z = 0$ danno $x = a$, $y = b$; dunque: <u>I coefficienti a, b nelle equazioni ridotte della retta sono le coordinate del punto del piano xy da cui esce la retta.</u>

Quanto ai primi due coefficienti essi determinano, come ora vedremo, la direzione della retta e diconsi perciò i <u>coefficienti angolari</u> della retta. Questo si vede osservando che se una seconda retta ha gli stessi coefficienti m, n cioè le equazioni ridotte

$$(3) \quad \begin{cases} x = mz + a' \\ y = nz + b', \end{cases}$$

le due rette sono parallele perchè il primo piano (2) è parallelo al primo piano (3) e così pure il secondo al secondo. Viceversa una retta parallela alla (2) ha necessariamente gli stessi coefficienti m, n perchè debbono riuscire paralleli i due piani condotti per ciascuna retta parallelamente all'asse delle x o delle y.

§ 63

Coseni di direzione di una retta ed angolo di due rette

1° Nel § precedente gli assi potevano essere qualunque; ma supponiamo ora che gli assi siano ortogonali e proponiamoci il problema: Date le equazioni di una retta calcolarne i coseni di direzione, dove è subito da osservarsi che rimarrà un'ambiguità di segno in questi coseni finchè non si fissi della retta la direzione positiva.

Supponendo dapprima che le equazioni della retta r siano sotto la forma generale (1) indichiamone con

$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$$

i coseni di direzione. La retta r è evidentemente perpendicolare tanto alla normale del primo piano (1) come a quella del secondo.

Ma di queste normali noi calcoliamo, colle formule (27) § 58, i coseni di direzione che saranno rispettivamente

[redacted]

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\,,\quad \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\,,\quad \frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

e se non importa precisare i segni dei radicali. Il problema è così ridotto a quello risoluto al § 37.

Per le applicazioni basta osservare che $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sono proporzionali ai tre minori della matrice

$$(a) \qquad \left\| \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix} \right\|$$

e si ha quindi

$$(4) \quad \cos\alpha = k \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad \cos\beta = k \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad \cos\gamma = k \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Il coefficiente k di proporzionalità si determina (a meno del segno) quadrando e sommando il che dà

$$1 = k^2 \left\| \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix} \right\|^2.$$

Le formole definitive richieste sono dunque:

$$(14^*)\quad \cos\alpha = \frac{\pm\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C'\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A'\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B'\end{vmatrix}^2}}\,,\quad \cos\beta = \frac{\pm\begin{vmatrix} C & A' \\ C' & A'\end{vmatrix}}{\sqrt{\quad}}\,,\quad \cos\gamma = \frac{\pm\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B'\end{vmatrix}}{\sqrt{\quad}}$$

Se supponiamo in particolare che le equazioni della retta siano le ridotte (2), la matrice (a) diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \end{vmatrix}$$

e si ha quindi

$$(5)\quad \cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,,\quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,,\quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,.$$

Se si vuol togliere l'ambiguità di segno conviene fissare il senso positivo della retta; conveniamo di prendere quello che forma un angolo acuto colla direzione positiva dell'asse Oz o in altri termini di considerare come positivo quel senso della retta secondo cui le coordinate z vanno crescendo. Allora, essendo γ acuto, dovrà essere $\cos\gamma > 0$, e le (5) precisate nel segno, diventano

$$(5^*)\quad \cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,,\quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,,\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\,.$$

Queste formole (5), (5*) ci dimostrano che la direzione della retta dipende unicamente

dai coefficienti m, n come si è già osservato in generale al § prec.

2° Date le equazioni di due rette, possiamo calcolare colle (4^*) i rispettivi coseni di direzione

$$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$$

$$\cos\alpha' \quad \cos\beta' \quad \cos\gamma',$$

e quindi l'angolo θ delle due rette colla formola

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Scriviamo le formole corrispondenti al caso più frequente che le due rette siano date per mezzo delle loro equazioni ridotte.

Se m, n sono i coefficienti angolari della prima retta avremo le (5^*); e medesimamente se m', n' sono i coefficienti angolari della seconda i suoi coseni di direzione positiva saranno

$$\cos\alpha' = \frac{m'}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}, \quad \cos\beta' = \frac{n'}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$$

Avremo quindi (§86):

$$(6) \qquad \cos\theta = \frac{mm'+nn'+1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\,\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$$

$$(7) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{(m^2+n^2+1)(m'^2+n'^2+1)} \left\| \begin{matrix} m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{matrix} \right\|^2.$$

Si ricava dalla (6): Affinchè due rette nello spazio siano ortogonali fra loro è necessario e sufficiente che i loro rispettivi coefficienti angolari (m, n), (m', n') (supposti gli assi ortogonali) soddisfano la relazione:

(8) $$m m' + n n' + 1 = 0.$$

Questa la forma analoga alla condizione d'ortogonalità per due rette nel piano (§ 32 (46*))

"§ 64"

Equazioni normali della retta

Anche per la retta nello spazio (riferita ad assi ortogonali) si usa spesso una forma speciale importante delle sue equazioni che dicesi la forma normale. Questa si ottiene applicando alla linea retta la forma di rappresentazione parametrica di cui abbiamo parlato in generale al § 57. Per definire una retta r nello spazio, insieme col suo senso positivo, basta darne i seguenti elementi:

1° i suoi tre coseni di direzione

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

2° le coordinate x_0, y_0, z_0 di un suo punto i-

iniziale P_0.(1)

Dopo ciò il modo più naturale di fissare una rappresentazione parametrica della retta r è di assumere sopra r un sistema di ascisse, prendendo come verso positivo di r quello fissato via ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) e come origine il punto iniziale P_0. Allora un punto qualunque P sulla retta è determinato dal valore algebrico del segmento P_0P (la sua ascissa); e noi poniamo

$$\overline{P_0P} = t$$

prendendo P per parametro (variabile ausiliaria) che determinano i punti di r. Siano ora

---

(1) Veniamo così ad introdurre 6 elementi in luogo di 4 che bastano (p. e. nelle equazioni ridotte) a definire una retta; ma l'introduzione di questi parametri in numero esuberante è ben compensata dalla simmetria e generalità che acquistano le formole. Del resto per ridurre i parametri a 4 basta considerare che i tre primi sono legati dalla relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ e dei tre secondi se ne può assumere uno nullo prendendo per P_0 uno dei tre punti ove la retta incontra i tre piani coordinati.

x, y, z le coordinate di P che dobbiamo esprimere in funzione di $\underline{t}$. Per questo basta applicare il teorema A) § 13 delle proiezioni, osservando che se M_0, M sono le proiezioni ortogonali di P_0, P p. e. sull'asse Ox il segmento $M_0M = x - x_0$ è la proiezione di P_0P, onde

$$x - x_0 = t \cos\alpha.$$

Formole analoghe si hanno per y, z e così le formole cercate si scrivono

(8) $x - x_0 = t\cos\alpha, \quad y - y_0 = t\cos\beta, \quad z - z_0 = t\cos\gamma,$

che ci danno appunto la rappresentazione parametrica della retta. Eliminando t dalle (8) si hanno le equazioni ordinarie della retta sotto la forma

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma},$$

ci dicesi appunto la forma normale. Ma il più delle volte converrà meglio lasciare le equazioni normali della retta sotto la forma primitiva (8), dove appare il significato geometrico del rapporto $\underline{t}$ comune alle espressioni (9), quale ascissa del punto mobile $P \equiv (x, y, z)$ rispetto al punto iniziale $(x_0\ y_0\ z_0)$.

Osserviamo che se la retta si definisce come congiungente due suoi punti $P_0 \equiv (x_0\ y_0\ z_0)$

$P_1\equiv(x_1 y_1 z_1)$, assumendo come suo senso positivo quello da P_0 verso P_1 nelle (5) il valore di t corrispondente ad $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ sarebbe positivo, onde

$$t=+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Si ricava di qui: I coseni della direzione che da $P_0\equiv(x_0 y_0 z_0)$ muove verso $P_1\equiv(x_1 y_1 z_1)$ sono dati da

$$(10)\quad \cos\alpha=\frac{x_1-x_0}{+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}},\quad \cos\beta=\frac{y_1-y_0}{+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z_1-z_0}{+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}$$

dando al radicale il valore positivo.

Del resto queste formole (10) deduconsi anche subito dalle fondamentali (3*) § 35 (che ne sono un caso particolare) con una traslazione di assi.

Osserviamo ora come si passa dalle equazioni normali di una retta alle ridotte e viceversa. Data una retta mediante le equazioni ridotte, i suoi coseni di direzione sono espressi dalle (5*); e scegliendo per punto iniziale sulla retta la sua traccia sul

piano xy vediamo che: per passare dalle equazioni normali della retta alla forma ridotta basta porre

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad z_0 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}.$$

Così nei vari problemi che andremo ora a trattare, sulle equazioni combinate delle rette e dei piani, ci riferiremo sempre alle equazioni normali della retta e per passare alle ridotte basterà eseguire le corrispondenti sostituzioni (11).

§ 65.

Problemi varii.

1° Problema: Trovare l'angolo d'inclinazione di una retta sopra un piano

La retta sia data mediante le sue equazioni normali (8) o (9) ed il piano mediante la sua equazione

$$(4) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

L'inclinazione θ della retta sul piano è il complemento dell'angolo che la retta fa colla normale al piano; ma questa ha i

coseni di direzione

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

e quindi è

$$(12) \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Naturalmente siccome qui sen θ deve essere positivo (giacchè per θ intendiamo un angolo acuto) dobbiamo nella (12) dare al radicale il segno del numeratore.

Se questo numeratore è nullo la retta è parallela al piano; così la condizione di parallelismo della retta al piano è data dalla relazione

$$(12^*) \qquad A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0.$$

Se le equazioni della retta sono date sotto forma ridotta la formola (12) diventa

$$(13) \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{Am + Bn + C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

e la condizione (12*) di parallelismo della retta al piano

$$(13^*) \qquad Am + Bn + C = 0.$$

2° Trovare il punto d'incontro d'una retta con un piano

La retta essendo data al solito dalle

sue equazioni normali ed il piano dalla sua equazione (6) sostituendo nella (6) per x, y, z i valori tratti dalle (8) abbiamo per determinare l'incognita t l'equazione di 1° grado:

(14) $A(x_0+t\cos\alpha)+B(y_0+t\cos\beta)+C(z_0+t\cos\gamma)+D=0$,

da cui

$$(15) \qquad t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma},$$

ne risulta così per t un valore determinato e finito, purchè non sia nullo il denominatore. Ciò è naturale perchè se si annulla $A\cos\alpha+$ $+B\cos\beta+C\cos\gamma$ la retta è parallela al piano e la (15), supposto che il numeratore insieme non si annulli ci da per t un valore infinito. Quando si annullasse poi anche il numeratore, la (14) sarebbe un'identità in t, cioè la retta giacerebbe totalmente sul piano. Anche questo è visibile a priori perchè delle due condizioni

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

la prima esprime che la retta è parallela al piano, la seconda che il punto $(x_0\,y_0\,z_0)$ della retta giace sul piano

3° Trovare la condizione perchè due rette siano

complanari.

Supponiamo le due rette r, r' date per mezzo delle loro rispettive equazioni normali:

$r)\quad x = x_0 + t\cos\alpha\,,\quad y = y_0 + t\cos\beta\,,\quad z = z_0 + t\cos\gamma$

$r')\quad x = x'_0 + t'\cos\alpha'\,,\quad y = y'_0 + t'\cos\beta'\,,\quad z = z'_0 + t'\cos\gamma'$

Le due rette saranno in un piano se due punti presi sull'una e due punti presi sull'altra saranno in un piano. Sulla prima prendiamo i due punti

$(x_0, y_0, z_0)\,,\quad (x_0 + t\cos\alpha\,,\ y_0 + \cos\beta\,,\ z_0 + \cos\gamma)$

e analogamente sull'altra

$(x'_0, y'_0, z'_0)\,,\quad (x'_0 + \cos\alpha'\,,\ y'_0 + \cos\beta'\,,\ z'_0 + \cos\gamma')$

Perchè le due rette stiano in un piano dovrà dunque annullarsi il determinante (§ 56)

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 & 1 \\ x_0 + \cos\alpha & y_0 + \cos\beta & z_0 + \cos\gamma & 1 \\ x'_0 + \cos\alpha' & y'_0 + \cos\beta' & z'_0 + \cos\gamma' & 1 \end{vmatrix}$$

che sottraendo la 1ª e 2ª linea dalla 3ª e 4ª rispettivamente indi la 1ª dalla 2ª si trasforma subito nell'altra

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Se le equazioni delle rette sono date sotto forma ridotta.

$$r) \begin{cases} x = m z + a \\ y = n z + b \end{cases} \qquad r') \begin{cases} x = m' z + a' \\ y = n' z + b' \end{cases}$$

colle sostituzioni (11) e le analoghe si trasforma la (16) nell'altra

$$\begin{vmatrix} a'-a & b'-b & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}$$

e più semplicemente

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} a'-a & b'-b \\ m'-m & n'-n \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$(17^*) \qquad (a'-a)(n'-n) = (m'-m)(b'-b)$$

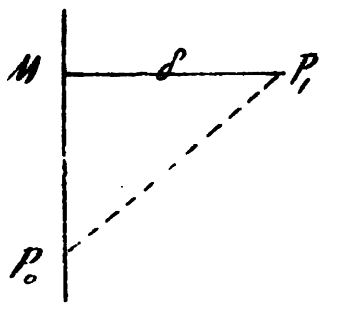
§ 66.

Distanza di un punto da una retta

Proponiamoci il problema: Date le equazioni normali (8) di una retta e le coordinate (x_1, y_1, z_1) di un punto P_1 calcolare la distanza δ del punto P_1 dalla retta.

Immaginiamo calata dal punto P_1 la perpendicolare P_1M sulla retta; dal triangolo rettangolo P_0P_1M (rettangolo in M) abbiamo

$$(18) \qquad \delta^2 = (P_0P_1)^2 - (P_0M)^2.$$



Essendo date le coordinate di P_0, P_1, conosciamo

$$(P_0P_1)^2 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2$$

e basterà quindi trovare la lunghezza P_0M che possiamo considerare come la distanza δ di P_0 dal piano condotto per P_1 normalmente alla retta.

Un primo modo di trovare la formola cercata si deduce quindi dalla risoluzione del seguente problema preliminare:

<u>Scrivere l'equazione del piano condotto per un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ normalmente ad una data direzione $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$</u>. L'equazione di un piano qualunque che passa per P_1 è

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

con A, B, C qualunque(1); ma nel nostro caso si deve avere

$$A : B : C = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma ,$$

---

(1) Se un piano $Ax+By+Cz+D=0$ passa per P_1 si deve avere $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, onde eliminando D si ha l'equazione del testo. Oppure basta applicare quanto si è detto al S 61 per la stella di piani osservando che $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$ sono tre piani della stella per P_1.

quindi l'equazione del piano richiesto è

(19) $(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0.$

Per la distanza $\underline{d}$ del punto P_0 da questo piano, applicando la nota regola (§ 54) troviamo

$$d=(x_1-x_0)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma,$$

e la (18) ci dà la formola richiesta

$$\delta^2=\{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\}-\{(x_1-x_0)\cos\alpha+(y_1-y_0)\cos\beta+(z_1-z_0)\cos\gamma\}^2$$

che si ricorda meglio sotto la regola seguente

(20) $$\delta^2=\left\|\begin{matrix}x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{matrix}\right\|^2,$$

ovvero, sviluppando il quadrato simbolico della matrice:

(20*) $$\delta=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ \cos\beta & \cos\gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1-z_0 & x_1-x_0\\ \cos\gamma & \cos\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{vmatrix}^2}$$

Alla medesima formola arriviamo anche cercando il valore di $\underline{t}$ al punto M (o del segmento P_0M) dalla condizione che la retta MP_1 deve essere perpendicolare alla direzione $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Ora i coseni della direzione MP_1 sono proporzionali alle differenze

$$x_1-x_0-t\cos\alpha,\quad y_1-y_0-t\cos\beta,\quad z_1-z_0-t\cos\gamma$$

e dobbiamo quindi avere

$$\cos\alpha(x_1-x_0-t\cos\alpha)+\cos\beta(y_1-y_0-t\cos\beta)+\cos\gamma(z_1-z_0-t\cos\gamma)=0$$

da cui

(21) $t = (x_1 - x_0)\cos\alpha + (y_1 - y_0)\cos\beta + (z_1 - z_0)\cos\gamma$,

che è il valore stesso trovato sopra per d, ma con significato preciso rispetto al segno. Così non solo troviamo la lunghezza della perpendicolare calata da P_1 sulla retta ma anche col valore (21) di t le coordinate

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\quad y = y_0 + t\cos\beta,\quad z = z_0 + t\cos\gamma$$

del piede di questa perpendicolare.

Ritornando alla formola (20*) che dà la distanza del punto $(x_1 y_1 z_1)$ dalla retta, notiamo che se le equazioni della retta sono scritte sotto forma ridotta:

$$\alpha)\qquad x - mz - a = 0,\quad y - nz - b = 0,$$

la (20*) diventa

$$(22)\quad \delta = \frac{\sqrt{(x_1 - mz_1 - a)^2 + (y_1 - nz_1 + b)^2 + \{n(x_1 - a) - m(y_1 - b)\}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}\ (1)$$

---

(1) Come si vede, la formola che dà la distanza di un punto da una retta nello spazio è ben più complicata della formola analoga nella geometria piana, o di quella che dà nello spazio la distanza di un punto da un piano. Negli ultimi due casi

Non è difficile ricordare questa formula ove si osservi che al numeratore sotto il segno $\sqrt{}$ compare la somma dei quadrati di tre espressioni da cui le prime due sono i resultati che si ottengono nei primi membri delle due equazioni ridotte 1) ecc. sostituendovi le coordinate del punto di cui si vuole la distanza: e la terza espressione si ottiene nel medesimo modo dalla terza equazione

$$3) \qquad n(x-a) \qquad -m(y-b)=0$$

che segue dalle 1) per eliminazione di z e rappresenta il piano che projetta ortogonalmente la retta sul piano xy come le 1) rappresentano gli altri due che la projettano sugli altri due piani coordinati.

§67.

Minima distanza fra due rette sghembe

Se due rette r, r' sono sghembe nello spazio (cioè non sono complanari), si sa dalla geometria elementare che esiste una ed una sola trasver-

---

la distanza è una funzione razionale, anzi lineare intera, delle coordinate del punto nell'attuale è una funzione irrazionale.

sale comune alle due rette e perpendicolare ad ambedue; e il segmento di questa trasversale compreso fra le due rette segna la minima distanza fra due punti scelti l'uno su r l'altro su r'. Proponiamoci il problema:

Date le equazioni (normali) di due rette trovare la lunghezza della loro minima distanza.

Come al § 165 scriveremo le equazioni normali delle rette r, r' così:

$$(23) \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \ y = y_0 + t\cos\beta, \ z = z_0 + t\cos\gamma \\ x = x_0' + t'\cos\alpha', \ y = y_0' + t'\cos\beta', \ z = z_0' + t'\cos\gamma' \end{cases}$$

Diamo una prima soluzione del problema fondandoci sull'osservazione seguente. Se per ciascuna delle due rette tiriamo il piano parallelo all'altra, la minima distanza fra le due rette è anche la distanza fra questi due piani paralleli. Basterà dunque risolvere il problema preliminare.

Scrivere l'equazione del piano π condotto per la retta r parallelamente alla r'; dopo di che, calcolando la distanza δ di un punto qualunque di r' da π, si avrà il valore della minima distanza cercata.

Il problema ora enunciato si risolve

subito osservando in primo luogo che il piano π deve passare pel punto $P_0 \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ della retta r ed ha una equazione della forma

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

di più la normale a π deve essere normale sia a r che a r' e per ciò i coefficienti A, B, C debbono soddisfare le due equazioni lineari ed omogenee

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$
$$A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' = 0,$$

onde risulta

$$A:B:C = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

Ne segue che l'equazione di π si scrive, sotto forma di determinante

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Così è risoluto il problema ausiliario enunciato, ed ora, per avere la minima distanza δ delle due rette, basterà calcolare la distanza del punto $(x_0'\, y_0'\, z_0')$ di r' dal piano (24); troviamola così:

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}^2}}$$

Il denominatore del 2° membro, per la formola (II*) § 36, è il seno dell'angolo θ delle due rette, dunque si può scrivere

$$(25) \quad \delta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}$$

Se le equazioni delle due rette sono date sotto forma ridotta la (25) diventa

$$(25^*) \quad \delta = \frac{\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ m'-m & n'-n \end{vmatrix}}{\sqrt{(m-m')^2 + (n-n')^2 + (mn'-m'n)^2}}.$$

Il prodotto

$$\delta \operatorname{sen}\theta = \begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}$$

dicesi il <u>momento</u> delle due rette. Esso si annulla soltanto quando le due rette sono complanari do-

vendosi per questo annullare δ ovvero sen θ; la prima cosa accade quando le due rette s'intersecano, la seconda quando sono parallele. Così troviamo come caso particolare delle formole attuali il risultato stabilito al § 65 (3°).

§ 68.

Altro modo di risolvere il problema. Segno della minima distanza.

Risolviamo ora la medesima questione in un secondo modo che ha il vantaggio di far conoscere non solo la formola (25) che dà la minima distanza δ fra le due rette ma anche le coordinate dei punti A, B ove questa perpendicolare comune ad r, r' le incontra.

Nello stesso tempo verrà così anche dimostrato analiticamente quanto al § prec. abbiamo desunto dalla geometria elementare.

Cerchiamo adunque se esiste un punto A su r ed un punto B su r' tali che il segmento AB sia perpendicolare tanto ad r quanto ad r'. Prendiamo come incognita nelle formole (23) l'ascissa t del punto A e quella t' del punto B; così avremo

$$(26)\qquad A \equiv (x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)$$

$$(27)\qquad B \equiv (x'_0 + t'\cos\alpha',\ y'_0 + t'\cos\beta',\ z'_0 + t'\cos\gamma').$$

Indicando ora con $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ i coseni della direzione normale ad ambedue le direzioni

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),\ (\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'),$$

precisati anche in segno secondo le convenzioni del § 31, avremo:

$$(28)\quad \cos a = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta' & \cos\gamma'\end{vmatrix},\ \cos b = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ \cos\gamma' & \cos\alpha'\end{vmatrix},\ \cos c = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha' & \cos\beta'\end{vmatrix}$$

Ciò posto il segmento $\overline{AB}$ avendo appunto la direzione ($\cos a$, $\cos b$, $\cos c$) ovvero la opposta, poniamo in valore algebrico

$$\overline{AB} = \delta,$$

così che alla minima distanza δ verrà attribuito non solo un valore assoluto ma anche un segno determinato. Poichè si arriva da A in B camminando nella direzione ($\cos a$, $\cos b$, $\cos c$) del tratto (algebrico) δ, le coordinate (27) di B dovranno risultare dalle corrispondenti (26) di A aumentandole rispettivamente di $\delta\cos a$, $\delta\cos b$, $\delta\cos c$. Questo ci fornisce per determinare i valori delle tre incognite t, t', δ il sistema delle tre equazioni lineari

$$(29)\quad \begin{cases} t\cos\alpha - t'\cos\alpha' + \delta\cos a = x'_0 - x_0 \\ t\cos\beta - t'\cos\beta' + \delta\cos b = y'_0 - y_0 \\ t\cos\gamma - t'\cos\gamma' + \delta\cos c = z'_0 - z_0 . \end{cases}$$

Il determinante delle incognite è

$$-\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha' & \cos a \\ \cos\beta & \cos\beta' & \cos b \\ \cos\gamma & \cos\gamma' & \cos c \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\theta$$

come si rileva dalle (28), sicchè intanto per l'incognita δ abbiamo

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha' & x'_0 - x_0 \\ \cos\beta & \cos\beta' & y'_0 - y_0 \\ \cos\gamma & \cos\gamma' & z'_0 - z_0 \end{vmatrix},$$

che è la (25) scritta sotto altra forma. Ma dalla (29) abbiamo altresì i valori di t, t'

$$(30)\quad \begin{cases} t = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} \\ \\ t' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} \end{cases}$$

formole che ci danno sopra $r)$ $r')$ rispettivamente i valori delle ascisse dei piedi della minima distanza.

Ritorniamo ora alla formola (25) che

dà la minima distanza δ e vediamo a quale circostanza geometrica è dovuto il segno positivo o negativo che la (25) assegna a δ. Essendo $\delta = AB$ (v.ª sopra), il segno è positivo se il verso positivo della perpendicolare comune ad r, r' procede dalla prima retta verso la seconda, negativo nel caso opposto. Nel primo caso la pagina positiva del piano condotto per r parallelamente ad r' guarda verso r' nel secondo caso nel verso opposto; e siccome sulla detta pagina positiva la direzione positiva r giace alla sinistra rispetto alla r (Cf. le convenzioni al § 57) possiamo dire che δ è positiva se rispetto ad un osservatore disteso lungo la direzione positiva r che guardi verso r' la direzione positiva di questa procede da sinistra verso destra, negativa nel caso contrario. Brevemente diremo: La minima distanza δ delle due rette r, r' calcolata dalla (25), risulta positiva secondo che la direzione positiva di r' (di r) è destrorsa ovvero sinistrorsa rispetto ad r (rispetto ad r').

Che si possono scambiare nel nostro enunciato le due rette r, r' è geometricamente intuitivo; ed analiticamente risulta da ciò che nel determinante del 2° membro della (25) vengono per que-

sì scambio scambiate le due ultime linee e nello stesso tempo si muta il segno degli elementi della prima linea.

Se escludiamo il caso di una coppia di rette r, r' ortogonali, possiamo convenire di scegliere le direzioni positive di r, r' in guisa che il loro angolo θ sia acuto, cioè sia

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' > 0;$$

e con questo ove si inverta il senso positivo di r viene pure invertito quello di r'; e δ, calcolata dalla (25), ha sempre il medesimo segno. Da quanto si è detto sopra risulta che questo è positivo se rispetto ad un osservatore disteso lungo r (nell'uno o nell'altro verso) e che guardi verso r', un punto che s'inalzi sopra r' procede dalla sinistra alla destra dell'osservatore, negativo nel caso opposto. Siccome invertendo r, r' non cambia il senso destrorso o sinistrorso, diremo brevemente che nel 1° caso la coppia di rette sghembe r, r' è destrorsa nel 2° sinistrorsa. Come resultato finale abbiamo dunque:

Supposta la solita orientazione degli assi ortogonali, la minima distanza δ per una coppia di rette sghembe (r, r'), calcolata dalla (25), è positiva per una coppia destrorsa ne-

gativa per una sinistrorsa quando

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' > 0,$$

se invece $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' < 0$ accade l'inverso.

Capitolo 7°

Coordinate projettive omogenee

§ 69.
Cenni generali

Le coordinate che abbiamo introdotto e di cui abbiamo trattato fin qui nella geometria analitica ad una, a due e a tre dimensioni, sono di natura metrica. Esse sono le più adatte allo studio delle proprietà metriche delle figure e nelle applicazioni di calcolo infinitesimale alla meccanica ecc; e di queste coordinate ci varremo principalmente nelle altre parti del corso.

Ma, quando si vogliano studiare le proprietà più generali projettive delle figure, riescono meglio adatti altri sistemi più generali di coordinate di natura projettiva e che perciò appunto diconsi

coordinate projettive. Un altro principale vantaggio di queste coordinate è che la loro introduzione permette di trattare analiticamente nel medesimo modo gli elementi a distanza finita delle figure (elementi proprî), come quelli a distanza infinita, (elementi improprii), sicchè anche dal punto di vista analitico resta perfettamente giustificata l'introduzione di questi elementi impropri.

In questo e nel seguente capitolo ci proponiamo di esporre le principali cose relative alle coordinate projettive e cominciamo intanto dal ricordare che le forme fondamentali delle tre specie considerate dalla geometria projettiva sono le seguenti

Forme di 1ª specie

1) Retta punteggiata.
2) Fascio di rette.
3) Fascio di piani.

Già nel Cap. 1° noi abbiamo trattato della coordinata di un elemento mobile in una tale forma; ma la coordinata introdotta era di natura metrica.

Forme di 2ª specie

1) Piano punteggiato
2) Piano rigato
1) Stella di rette

2) Stella di piani.

Forme di 3ª specie

1) Spazio punteggiato

2) Spazio di piani.

Rispetto alle forme delle due ultime specie abbiamo trattato fin qui di coordinate (metriche) solo sulla forma 1) dell'una e dell'altra specie.

La posizione di un elemento in ciascuna delle forme fondamentali sopra enumerate si può individuare facendo corrispondere all'elemento un numero, o una coppia, o infine una terna di numeri secondo che la forma appartiene alla 1ª, alla 2ª o alla 3ª specie; e viceversa preso ad arbitrio un numero, o una coppia o una terna di numeri resta individuato nella forma un corrispondente elemento. Per ciò si dice anche che la forma di 1ª specie sono enti geometrici ad una dimensione quelle di 2ª a due dimensioni e quella di 3ª a tre.

I numeri che servono ad individuare la posizione dell'elemento nella forma diconsi le coordinate dell'elemento; il numero delle coordinate indipendenti necessario a individuare l'elemento dà la dimensione della forma. Tali concetti generali si applicano non solo alle forme fondamentali della

geometria projettiva elementare ma a qualunque ente geometrico generato da un elemento geometrico variabile di qualunque natura.

E così p. e. lo spazio considerato come luogo di rette (elementi), o spazio rigato, è un ente a quattro dimensioni perchè quattro sono i numeri necessari ad individuare una retta nello spazio. Lo spazio rigato è adunque una forma di 4.a specie.

§ 70

Coordinate projettive nella forma di 1.a specie

In una forma di 1.a specie (p. e. in una punteggiata) fissiamo due elementi A_1, A_2 che si dicono fondamentali ~~ed~~ un terzo elemento E che prenderà il nome di elemento unità. Se P è un quarto elemento nella forma, consideriamo il birapporto (A_1A_2EP) dei quattro elementi nell'ordine scritto e poniamo

$$(A_1A_2EP) = \lambda.$$

Ad ogni posizione di P nella forma corrisponde un determinato valore del numero λ, e viceversa ad ogni valore di λ (non escluso il va-

tore $\lambda = \infty$) un solo elemento P. Perciò il numero λ è da considerarsi come coordinata di P e siccome la sua definizione per mezzo di un birapporto è di natura projettiva [1] diremo λ la coordinata projettiva dell'elemento P.

Si osservi che le coordinate degli elementi fondamentali A_1, A_2 sono rispettivamente

$$\lambda = \infty \,, \quad \lambda = 0$$

mentre la coordinata di E è data da

$$\lambda = 1,$$

ciò ci spiega il nome di elemento unità.

Si può ora facilmente vedere come la coordinata metrica introdotta al Cap. 1° per le forme di 1ª specie non sia che un caso particolare della generale coordinata projettiva λ sopra definita.

E infatti se la forma è una punteggiata si faccia allontanare a distanza infinita l'elemento A_1 restando A_2 a distanza finita e si ponga l'elemento unità E alla distanza unitaria di A_2 e dalla parte positiva sicchè $\overline{A_2E} = 1$. Allora si ha

$$\lambda = (A_1 A_2 E P) = (\infty A_2 E P) = (P E A_2 \infty)$$

---

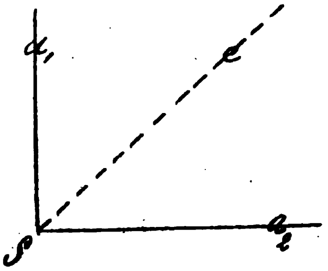
(1) Cf. la conclusione del § 8.

indi (§ 3)

$$\lambda = \frac{\overline{PA_2}}{\overline{EA_2}} = \frac{\overline{A_2P}}{\overline{A_2E}} = \overline{A_2P}.$$

Dunque λ si muta nell'ordinaria ascissa misurata a partire da A_2 come origine.

Se la forma è un fascio di raggi fondamentali a_1, a_2 ortogonali assumendo a_2 come raggio



origine nel fascio e per raggio unità $\underline{e}$ prendasi la bisettrice di a_1, a_2. Allora se $\underline{p}$ è un raggio di anomalia θ, siccome i valori della coordinata metrica $\operatorname{tg}\theta$ (§ 6) sono in a_1, a_2, e, p rispettivamente

$$\infty, 0, 1, \operatorname{tg}\theta,$$

avremo (cf. § 3 (7*))

$$(a_1\, a_2\, e\, p) = (\infty, 0, 1, \operatorname{tg}\theta) = \operatorname{tg}\theta$$

cioè la coordinata projettiva si ridurrà alla coordinata metrica $\operatorname{tg}\theta$.

Affatto analogamente dicasi per un fascio di piani (§ 8).

§ 71.

Espressione del birapporto di quattro elementi

Andiamo ora a risolvere il seguente problema fondamentale: Dati in una forma di 1ª specie quattro elementi P_1, P_2, P_3, P_4 per mezzo dei valori delle loro coordinate

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4,$$

esprimere il birapporto $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ per funzione di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Se la coordinata λ è la coordinata metrica del Cap. 1º si è visto che:

<u>Il birapporto $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ di quattro elementi in una forma di 1ª specie eguaglia il birapporto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dei quattro numeri che sono le rispettive coordinate.</u>

Dimostriamo che questo teorema sussiste egualmente colla più generale coordinata λ projettiva. Per questo ci conviene ricorrere alla proprietà dei birapporti in una forma di 1ª specie espressa dalla formola seguente

$$(1) \qquad (P_1 P_2 P_3 P_4) : (P_1 P_2 P_3 Q_4) = (P_1 P_2 Q_4 P_4)$$

Poichè un birapporto di elementi nella forma si riduce sempre, come sopra abbiamo ricor-

dato, al birapporto di quattro numeri corrispondenti, le loro coordinate metriche, basterà dimostrare la (1) sui birapporti di numeri. Così adunque è da provarsi che

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1, x_2, x_3, y_4) = (x_1, x_2, y_4, x_3) .$$

Ora per definizione

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$(x_1, x_2, x_3, y_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - y_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - y_4)} ;$$

dunque:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1, x_2, x_3, y_4) = \frac{(x_1 - y_4)(x_2 - x_4)}{(x_2 - y_4)(x_1 - x_4)} = (x_1, x_2, y_4, x_4)$$

c. d. d.

Ciò premesso osserviamo che si ha per definizione

$(A_1 A_2 E P_1) = \lambda_1$, $(A_1 A_2 E P_2) = \lambda_2$, $(A_1 A_2 E P_3) = \lambda_3$, $(A_1 A_2 E P_4) = \lambda_4$,
indi dividendo il 1° birapporto per il 3° applicando la (1)

$$(A_1 A_2 P_3 P_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} .$$

e per ciò scambiando i due elementi medi (§46):

$$(2) \qquad (A_1 P_3 A_2 P_1) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3}$$

Ponendo in questa P_2 al posto di P_1, indi λ_2 al posto di λ_1, avrò

$$(2') \qquad (A_1 P_3 A_2 P_2) = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_3}$$

e dividendo nuovamente la (2) per la (2'):

$$(A_1 P_3 P_2 P_1) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3},$$

che possiamo anche scrivere

$$(3) \qquad (P_2 P_1 A_1 P_3) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

In quest'ultima poniamo P_4 al posto di P_3 indi λ_4 per λ_3 indi e dividiamo la (3) per la nuova formola ciò che dà

$$(P_2 P_1 P_4 P_3) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

ossia

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Il secondo membro è appunto il birapporto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dei quattro numeri λ, onde è dimostrato il teorema enunciato.

§. 72.

Projettività nelle forme di 1ª specie. Trasformazione di coordinate

Andiamo ora ad occuparci della rappresentazione analitica della projettività per due forme di 1ª specie. Come è noto, due tali forme si dicono in corrispondenza projettiva o semplicemente projettiva quando ad ogni elemento dell'una corrisponde un solo elemento dell'altra e viceversa, e questo in modo che il birapporto di quattro elementi qualunque dell'una sia eguale al birapporto dei quattro elementi corrispondenti dell'altra. Brevemente una corrispondenza projettiva per due forme di 1ª specie è una corrispondenza biunivoca che conserva i birapporti.

Scelti ad arbitrio nella prima forma gli elementi fondamentali e l'elemento unità, e così per la seconda, sia λ la coordinata (projettiva) di un elemento mobile nella prima forma, μ quella dell'elemento corrispondente nella seconda.

Siano poi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre valori fissi qualunque ma distinti di λ e μ_1, μ_2, μ_3 i corrispondenti di μ; per la definizione stessa di projettività e pel teore-

ma fondamentale del § precedente dovremo avere

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

cioè

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2-\lambda}{\lambda_3-\lambda} = \frac{\mu_1-\mu_3}{\mu_2-\mu_3} \cdot \frac{\mu_2-\mu}{\mu_3-\mu}$$

ovvero posto

$$k = \frac{(\mu_1-\mu_3)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\mu_2-\mu_3)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda}{\lambda_3-\lambda} = k\,\frac{\mu_2-\mu}{\mu_3-\mu}$$

dove la costante k non sarà nè zero nè infinito. Riducendo questa relazione fra λ, μ a forma intera, essa acquista la forma bilineare in λ, μ

(I) $\quad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$

dove le costanti a, b, c, d hanno i valori

$$a = 1-k, \quad b = k\mu_2 - \mu_3, \quad c = k\lambda_3 - \lambda_2, \quad d = \lambda_2\mu_3 - k\mu_2\lambda_3$$

ed è quindi

$$ad - bc = k(\lambda_2-\lambda_3)(\mu_2-\mu_3).$$

Il determinante $ad-bc$ dicesi il determinante (modulo) della relazione bilineare (I), onde si vede intanto: <u>Una projettività fra due forme di 1ª specie si traduce analiticamente in una relazione bilineare (I) a determinante $ad-bc \neq 0$, fra</u>

<u>le coordinate λ, μ di due elementi corrispondenti nelle due forme.</u>

Viceversa dimostriamo: <u>Se fra le coordinate λ, μ di due elementi mobili in due forme di 1a specie si pone una relazione bilineare (I), a determinante $ad - bc \neq 0$, le due forme saranno riferite projettivamente.</u>

Osserviamo prima di tutto il significato della condizione $ad-bc \neq 0$. Se fosse nella (I) $ad-bc=0$ e nello stesso tempo fosse $a \neq 0$ il primo membro della (I) si scinderebbe nel prodotto dei due fattori lineari in λ, μ rispettivamente

$$\frac{1}{a}(a\lambda+c)(a\mu+b)$$

e quindi a qualunque elemento $\lambda \neq -\frac{c}{a}$ corrisponderebbe sempre il medesimo elemento $\mu = -\frac{b}{a}$ e parimenti a qualunque elemento $\mu \neq \frac{b}{a}$ nella seconda forma corrisponderebbe nella prima l'unico elemento $\lambda = -\frac{c}{a}$. Verrebbe quindi a mancare il carattere di biunivocità della corrispondenza e la corrispondenza sarebbe, come si dice, <u>degenere</u>.(1)

---

(1) Anche geometricamente si possono avere di tali projettività degeneri; p. e. segando un fascio di rette con una retta (punteggiata) del fascio stesso.

Lo stesso accadrebbe con $ad-bc=0$ perchè sarebbe zero allora b, ovvero c e dalla (I) sparirebbe affatto λ o μ. Così la condizione $ad-bc\neq 0$ esprime che la corrispondenza non è degenere.

Dalla (I) ricaviamo

$$\text{(II)} \qquad \mu = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c} \quad \text{o} \quad \lambda = -\frac{c\mu + d}{a\mu + b},$$

quindi, quando $ad-bc\neq 0$, μ è un'effettiva funzione lineare di λ, e viceversa e la corrispondenza, posta fra gli elementi delle due forme ha intanto il carattere di biunivocità. Per dimostrare che è una projettività dobbiamo ora provare che conserva i birapporti. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quattro valori distinti qualunque di λ e $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ i corrispondenti di μ; avremo per la (II):

$$\mu_1 = -\frac{b\lambda_1 + d}{a\lambda_1 + c}, \quad \mu_2 = -\frac{b\lambda_2 + d}{a\lambda_2 + c}, \quad \mu_3 = -\frac{b\lambda_3 + d}{a\lambda_3 + c}, \quad \mu_4 = -\frac{b\lambda_2 + d}{a\lambda_4 + c}.$$

Di qui ricaviamo

$$\mu_1 - \mu_3 = -\frac{(ad-bc)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a\lambda_1 + c)(a\lambda_3 + c)}$$

$$\mu_2 - \mu_3 = \frac{(ad-bc)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a\lambda_2 + c)(a\lambda_3 + c)}$$

e dividendo

$$\frac{\mu_1-\mu_3}{\mu_2-\mu_3}=\frac{a\lambda_2+c}{a\lambda_1+c}\cdot\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3};$$

analogamente

$$\frac{\mu_1-\mu_4}{\mu_2-\mu_4}=\frac{a\lambda_2+c}{a\lambda_1+c}\cdot\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}$$

e dividendo nuovamente

$$(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4),\ c.d.d.$$

Così adunque la relazione bilineare (I), a determinante $ad-bc\neq 0$, è <u>caratteristica</u> della projettività.

Osserviamo anche il teorema fondamentale:

<u>Per individuare una projettività fra due forme di 1ª specie si possono dare ad arbitrio di tre elementi nell'una e tre corrispondenti dell'altra.</u>

Infatti, riportando la corrispondenza projettiva degli elementi della forma ai numeri che ne sono le coordinate, detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tre elementi dell'una, μ_1, μ_2, μ_3 i corrispondenti dell'altra si deve avere

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda)=(\mu_1\mu_2\mu_3\mu)$$

ciò che fissa in modo unico la relazione bilineare fra λ, μ.

La relazione bilineare (I) fra λ, μ che, interpretando λ, μ come coordinate di elementi corri-

spondenti in due forme di 1ª specie, rappresenta analiticamente una projettività è suscettibile di una seconda importante interpretazione come formola di trasformazione della coordinata projettiva in una forma di 1ª specie. Supponiamo infatti di cangiare comunque in una tale forma gli elementi fondamentali e l'elemento unità e siano A'_1, A'_2, E' questi nuovi elementi; indichiamo come prima con λ la coordinata (projettiva) di un elemento qualsiasi P riferito ad $A_1, A_2; E$ e con μ la coordinata dello stesso elemento P riferito al nuovo sistema $A'_1 A'_2 E'$. Avremo per definizione

$$\mu = (A'_1 A'_2 E' P),$$

onde se con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ indichiamo i valore di λ nei rispettivi elementi A'_1, A'_2, E' sarà

$$\mu = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda).$$

Il secondo membro è una funzione lineare di λ come il secondo membro della (II) e dipendentemente dalla scelta di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cioè di $A'_1, A'_2 E'$ può essere una qualunque funzione lineare di λ. Concludiamo adunque:

La relazione bilineare (I) fra λ, μ può interpretarsi, in un secondo senso, come formola di trasformazione della coordinata projettiva

in una forma di 1ª specie.

§. 73.

Elementi immaginarii nelle forme di 1ª specie.

Un elemento variabile in una forma di 1ª specie è per noi rappresentato da un numero variabile λ, la sua coordinata. Quando studiamo colla geometria analitica delle proprietà geometriche (relative qui a forme di 1ª specie) noi operiamo algebricamente sui numeri che rappresentano le coordinate degli elementi e dai resultati del calcolo algebrico, sostituendo di nuovo ai numeri gli elementi corrispondenti delle forme, deduciamo una corrispondente proprietà geometrica. Fino ad ora noi abbiamo inteso sempre di parlare soltanto di elementi effettivi (reali) delle forme rappresentate da numeri reali, sicchè anche le corrispondenti operazioni algebriche dovevano intendersi limitate al campo dei numeri reali. Ma, come ben si sa, l'algebra, per poter dare ai suoi resultati tutta la possibile generalità ed enunciare i suoi teoremi senza eccezione ha dovuto ampliare il campo dei numeri reali nel campo dei generali nume-

ri complessi) immaginarii. In questo campo più ampio valgono ancora tutte le leggi formali del calcolo algebrico ed i teoremi ricevono tutta la loro estensione senza restrizioni di sorta). Tra questi basterà citare il fondamentale: <u>Ogni equazione di grado m in un'incognita ha m radici</u>.

Se nelle applicazioni geometriche ci limitassimo al campo reale non potremmo trasportare nella geometria i teoremi dell'algebra che in modo incompleto. Per evitare siffatto inconveniente si è trovato opportuno di estendere il linguaggio geometrico come l'analitico ed introdurre nella geometria elementi nuovi da dirsi <u>immaginarii</u>, corrispondenti a valori immaginarii delle rispettive coordinate. Così in una forma di 1ª specie accanto agli elementi reali, corrispondenti a valori reali della coordinata projettiva λ, si introducono elementi immaginarii corrispondenti a valori immaginarii di λ. Questi elementi immaginarii non hanno dapprima una rappresentazione geometrica, sebbene si possa e convenga in ulteriori ricerche, delle quali però noi non avremo da occuparci, attribuire loro, in un corrispondente campo geometrico ampliato, una rappresentazione reale.

Qui, per le forme di 1ª specie, facciamo l'osservazione fondamentale che la nozione di birapporto di quattro elementi _reali_ si estende immediatamente ad elementi immaginarii, sostituendovi quella del birapporto dei quattro numeri complessi che ne sono le coordinate. È manifesto come tutte le proprietà fondamentali del birapporto di quattro numeri (§§. 3-5) valgono indifferentemente nel campo complesso come nel reale. Così la projettività in due forme di 1ª specie verrà di conseguenza estesa agli elementi immaginarii delle due forme in base alla rappresentazione analitica data dalla (I). E non solo potremo considerare projettività reali (nelle quali ad ogni elemento reale corrisponde un elemento reale) rappresentate da un'equazione bilineare (I) a coefficienti reali (o meglio coi rapporti a:b:c:d dei coefficienti reali) ma anche projettività immaginarie, ove l'equazione bilineare (I) abbia coefficienti complessi qualunque.

Introdotta la nozione di elementi immaginarii, si potranno anche assumere per elementi fondamentali $A_1 A_2$ e per elemento unità E degli elementi complessi per stabilire un sistema di coordinate; soltanto allora non avver-

rà; però che a valori reali della coordinata λ corrispondano elementi reali della forma e viceversa.

In questo senso generale la trasformazione di coordinate si opererà sempre per mezzo di una sostituzione lineare (II), ma i suoi coefficienti a, b, c, d potranno essere complessi qualunque.

Ritornando ora all'ipotesi di elementi fondamentali ed elementi unità reali, chiameremo <u>elementi coniugati</u> della forma due elementi immaginarii che corrispondano a valori coniugati

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \lambda = \alpha - i\beta$$

della coordinata. Così ad ogni elemento immaginario della forma ne corrisponderà uno coniugato. Ed è essenziale osservare che, cangiando comunque il sistema fondamentale <u>reale</u> di riferimento, l'elemento coniugato di un dato elemento rimarrà sempre lo stesso perchè, la nuova coordinata μ essendo una funzione lineare dell'antica λ <u>con coefficienti reali</u>, a valori coniugati di λ corrispondono valori coniugati di μ.

Nel seguito, quando tratteremo delle forme di specie superiore, intenderemo senz'altro introdotta la nozione degli <u>elementi immaginarii</u> di queste forme che, salvo il maggior numero di coordinate, si fonda sulle considerazioni stesse che

abbiamo qui svolte per le forme di 1ª specie.

E da ultimo avvertiremo che l'introduzione degli elementi immaginarii in geometria non ha un valore puramente formale, ma è basata sulla circostanza che il ragionamento geometrico, come il calcolo algebrico, conserva la sua validità applicato al campo complesso come al reale. Ed anche avendo per iscopo finale soltanto lo studio di proprietà geometriche reali, riescirà utile compiere la ricerca più generale nel campo complesso, dove rimarrà poi, in ogni singola ricerca, da distinguere in ultimo quali sono gli elementi reali e quali i complessi.

P. e. in una forma di 1ª specie di un elemento C cerchiamo il coniugato armonico D rispetto a due dati elementi A, B. Sarà D reale con C se lo sono A e B; ma anche quando A, B siano immaginarii coniugati sarà ancora D reale con C. E invero se

$$a+it, \quad a-it, \quad \lambda, \mu$$

sono i valori della coordinata projettiva in A, B, C, D rispettivamente, dovendo essere

$$(a+it, a-it, \lambda, \mu) = -1$$

ne risulta

373.

$$\mu = \frac{a^2 + b^2 - a\lambda}{a - \lambda}$$

ed è μ reale con λ. In particolare si osservi:

<u>In una punteggiata il punto medio di un segmento (coniugato del punto all'infinito) i cui estremi sono punti coniugati immaginarii è reale.</u>

374.

Forme projettive sovrapposte - Involuzione.

Ritornando ora alla projettività, reale o no, fra due forme, consideriamo due forme projettive sovrapposte cioè due forme dello stesso nome (due punteggiate, o due fasci di raggi, o due fasci di piani) i cui sostegni siano sovrapposti. Prendiamo per le due forme gli stessi elementi fondamentali e lo stesso elemento unità e sia

(I) $$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

la relazione di projettività. Domandiamoci se esiste qualche elemento P <u>unito</u>, ossia tale che considerando P come appartenente all'una forma vi corrisponda lo stesso elemento nell'altra. Se λ è la coordinata di P, sarà per ciò necessario e sufficiente che ne risulti $\mu = \lambda$; dunque: gli <u>elementi</u>

uniti sono quelli definiti dalle radici della equazione di 2° grado:

(2) $$a\lambda^2 + (b+c)\lambda + d = 0,$$ [1]

e quindi: in due forme di 1ª specie projettive sovrapposte vi sono due elementi uniti che possono essere reali od immaginarii, distinti o coincidenti.

A prima vista può sembrare che faccia eccezione il caso in cui nella (I) sia $a = 0$ perchè allora la (2) non è di 2° ma di 1° grado. Ma bisogna considerare che in tal caso per $\lambda = \infty$ si ha $\mu = \infty$ e l'elemento corrispondente a $\lambda = \infty$ è già quindi un elemento unito; l'altro è fornito dall'equazione di 1° grado $(b+c)\lambda + d = 0$.

Se la projettività è reale, si possono prendere a, b, c, d reali; ed allora i due elementi sono reali e distinti se $(b+c)^2 - 4ad > 0$, reali e coincidenti quando $(b+c)^2 - 4ad = 0$, ed infine immaginarii coniugati se $(b+c)^2 - 4ad < 0$.

Supposti i due elementi uniti distinti (reali o no), possiamo sceglierli come elementi fondamentali A_1, A_2 e allora, dovendo essere per $\lambda = \infty$, o

---

(1) Escludiamo il caso in cui la (2) sia un'identità che allora ogni elemento della 1ª forma coinciderebbe col corrispondente nella 2ª.

rispettivamente $\mu = \infty, 0$, dovremo avere $a = d = 0$, onde la relazione (I) di projettività assumerà la forma semplice

$$\mu = k\lambda \text{ (} k \text{ costante).}$$

Se ora P è un elemento qualunque della 1ª forma, P' il corrispondente nella seconda, avremo

$$(A_1 A_2 P P') = (\infty, 0, \lambda, k\lambda) = k,$$

da cui il teorema: Una coppia qualunque di elementi corrispondenti nelle due forme projettive sovrapposte forma un birapporto costante coi due elementi uniti (supposti distinti)

In due forme projettive sovrapposte ogni elemento P può riguardarsi sia appartenente alla 1ª sia alla 2ª forma e nei due casi vi corrispondono in generale due elementi distinti. Domandiamo ora se a qualche elemento P può corrispondere il medesimo Q nella 2ª e nella 1ª forma, nel qual caso diremo che P, Q si corrispondono in doppio modo.

Se λ, μ sono le coordinate di due tali elementi, dovrà perciò la (I) rimanere soddisfatta da λ, μ come anche scambiando λ con μ. Ma, sottraendo la nuova equazione

$$a\lambda\mu + b\mu + c\lambda + d = 0$$

dalla (I) ne deduciamo

$$(b-c)(\lambda-\mu)=0;$$

dovrà dunque essere o $\lambda=\mu$, ciò che conduce agli elementi uniti (soluzione ovvia della questione), ovvero si avrà $b=c$. In quest'ultimo caso importante la relazione di projettività (I) è simmetrica in λ, μ; tutte le coppie corrispondenti si corrispondono in doppio modo e la projettività prende il nome speciale di involuzione. Dunque: Se una coppia di elementi (distinti) si corrisponde in doppio modo lo stesso accade per ogni altra coppia, e la projettività è un'involuzione.

Osserviamo che in un'involuzione (non degenere) gli elementi uniti sono sempre distinti, perchè altrimenti sarebbe

$$ad-bc=ad-b^2=0.$$

Scelti gli elementi uniti dell'involuzione per elementi fondamentali, avremo

$$a=d=0\ ,\quad b=c.$$

onde $\mu=-\lambda$ e quindi: In ogni involuzione qualsiasi coppia divide armonicamente la coppia degli elementi uniti.

§ 75.

Involuzione ortogonale di raggi. Definizione projettiva dell'angolo.

Un esempio importante di involuzione in un fascio di raggi è l'involuzione *ortogonale*, o come anche si dice *circolare*, la quale si ottiene facendo corrispondere ad ogni raggio del fascio il suo perpendicolare.

Che in tal modo si ottenga un'involuzione risulta subito dal considerare che fra le coordinate tangenti m, m' (o coefficienti angolari) di due raggi corrispondenti (ortogonali) ha luogo la relazione

$$m m' = -1,$$

che è bilineare e simmetrica in m, m'.

I due raggi doppi (uniti) dell'involuzione ortogonale corrispondono alle radici dell'equazione $m^2 = -1$ cioè a $m = \pm i$; questi raggi immaginarii coniugati diconsi i raggi *assoluti* od *isotropi* del fascio, od anche le *rette cicliche* uscenti dal centro S del fascio.

Dal teorema generale alla fine del

§ prec. risulta: <u>Due rette sono fra loro perpendicolari allora ed allora soltanto quando dividono armonicamente le due rette cicliche uscenti dal loro punto comune.</u>

Così una proprietà metrica, di <u>perpendicolarità</u>, è trasformata, coll'uso delle rette cicliche, in una proprietà projettiva <u>di birapporto armonico</u>. Ma più in generale abbiamo un importante formola, dovuta a Laguerre, la quale permette di dare una definizione projettiva dell'angolo, riducendolo alla nozione di birapporto. In un fascio consideriamo due raggi a, b e sia $\hat{ab} = \theta$ il loro angolo definito come al §6. Preso il raggio a come origine, e detto c_1, c_2 i due raggi ciclici, i valori della coordinata tangente λ di

$$a, b, c_1, c_2$$

rispettivamente sono

$$\lambda = 0, \ \lambda = tg\,\theta, \ \lambda = i, \ \lambda = -i$$

Dunque pel birapporto $(a\,b\,c_1\,c_2)$ abbiamo

$$(a\,b\,c_1\,c_2) = (0, tg\,\theta, i, -i)$$

ossia

$$(a\,b\,c_1\,c_2) = \frac{i + tg\,\theta}{i - tg\,\theta} = e^{-2i\theta}$$

e prendendo i logaritmi

$$\theta = \frac{i}{2} \log (a\,b\,c_1\,c_2).$$

È questa la formola di Laguerre, la quale ci dice: L'angolo di due rette si ottiene moltiplicando per $\frac{i}{2}$ il logaritmo del birapporto che le due rette formano colle rette cicliche uscenti dal loro punto d'incontro. Si osservi che la indeterminazione nel logaritmo, che è definito solo a meno di multipli di $2\pi i$ corrisponde alla indeterminazione di θ a meno di multipli di π (cf § 6). In particolare quando $(a\,b\,c_1\,c_2) = -1$ si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$ e si ritrova il risultato già osservato sopra.

Facciamo ancora l'osservazione seguente, che dovremo applicare in seguito. Supponiamo di avere un'involuzione reale qualunque di raggi che sarà rappresentata da una relazione bilineare simmetrica nelle coordinate tangenti

$$(3) \qquad a\,m\,m' + b\,(m + m') + c = 0$$

con coefficienti a, b, c reali e domandiamo se esiste qualche coppia ortogonale di raggi dell'involuzione. Dovremo avere per una tale coppia insieme alla (3) l'altra

$$m\,m' = -1$$

ed eliminando fra le due m' la relazione di 2° grado in m

$$(4) \qquad b\,m^2 + (c - a)\,m - b = 0.$$

Se questa è un'identità, cioè $b=0$, $c=a$ l'involuzione è composta di coppie tutte ortogonali. In caso contrario la (4) ha sempre due radici reali il cui prodotto è $=-1$.

Dunque: In ogni involuzione reale di raggi esiste una ed una sola coppia, sempre reale, di raggi ortogonali, ovvero tutte le coppie sono ortogonali.

"§ 76"

Coordinate projettive omogenee in una forma di 1.ª specie

Quando si determina la posizione di un elemento in una forma di 1.ª specie per mezzo della coordinata projettiva λ, la corrispondenza biunivoca fra gli elementi della forma ed i numeri λ si ha soltanto quando anche il valore improprio $\lambda=\pm\infty$ si computi fra i valori di λ. Si può con un semplice mezzo evitare questo inconveniente. Pongasi perciò λ sotto la forma del quoziente di due numeri x_1, x_2

$$\lambda=\frac{x_1}{x_2};$$

assegnando a x_1, x_2 determinati valori ne verrà individuato λ e quindi l'elemento P nella forma. Ma invece se è dato P, indi λ, i valori di x_1, x_2 saranno determinati solo a meno di un fattore comune arbitrario di proporzionalità. Diremo x_1, x_2 le coordinate omogenee (projettive) dell'elemento P e scriveremo $P \equiv (x_1, x_2)$, dove sarà da tener presente che (kx_1, kx_2) ove k è arbitraria rappresenta sempre il medesimo elemento. Ora è chiaro che possiamo dare a λ tutti i valori, compreso $\lambda = \infty$, dando alle coordinate omogenee x_1, x_2 valori sempre finiti ed escludendo i valori simultanei $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ combinazione che nel quoziente $\frac{x_2}{x_1}$ sarebbe priva di significato. Così in particolare potremo porre

$$A_1 \equiv (1, 0), \quad A_2 \equiv (0, 1), \quad E \equiv (1, 1).$$

A prima vista può sembrare che, coll'introdurre una coordinata in più, venga a complicarsi maggiormente la trattazione analitica. Ma l'esclusione di valori infiniti per le coordinate, l'omogeneità e la simmetria che ne ricevono tutte le formole, l'avere una medesima rappresentazione analitica per gli elementi proprii od improprii della figura, sono tutti vantaggi che compensano largamente l'introdu-

zione di una coordinata in più.

Per addurre subito un esempio vediamo quale è attualmente, in coordinate omogenee, la rappresentazione analitica di una projettività o, se si vuole, di una trasformazione di coordinate (§ 72). Siano x_1, x_2 le coordinate omogenee di un elemento dell'una forma, ed y_1, y_2 quelle del corrispondente dell'altra. La relazione di projettività (o trasformazione di coordinate) è espressa analiticamente dalla formola

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a_{11}\frac{x_1}{x_2} + a_{12}}{a_{21}\frac{x_1}{x_2} \quad a_{22}} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2},$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono costanti ed il determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ è diverso da zero. Osservando che se y_1, y_2, come coordinate omogenee, son determinate solo a meno di un fattore comune, possiamo scrivere senz'altro

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 . \end{cases}$$

Così le formole di projettività fra due forme di 1ª specie sono rappresentati, in coordinate omogenee, da una sostituzione lineare

intera ed omogenea (III) a determinante $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \neq 0$, e viceversa.

Capitolo 8°

Coordinate projettive omogenee nelle forme di 2ª e di 3ª specie

§ 77.

Coordinate projettive omogenee nel piano punteggiato

Prendiamo ora a trattare delle coordinate projettive (omogenee) nelle forme di 2ª specie. Basterà che trattiamo successivamente del piano punteggiato e del piano rigato perchè, per la natura stessa projettiva delle coordinate, verranno anche subito stabilite per le altre due forme (stella di raggi e di piani) che si ottengono per projezione dalle prime due.

Fissiamo nel piano punteggiato tre punti A_1, A_2, A_3 ad arbitrio, purchè non siano in linea retta (non appartengano ad una punteggiata), ed un quarto punto E che non

cada sui lati del triangolo $A_1 A_2 A_3$; diremo A_1, A_2, A_3 punti fondamentali, E punto unità, e tutti insieme elementi di riferimento.

Per fissare la posizione di un punto P a distanza finita o all'infinito nel piano, basterà conoscere p. e. nei due fasci di rette di centri A_1, A_2, la posizione dei due raggi A_1P, A_2P. Indicando con

$$A_2(A_2 A_3 E P)$$

il birapporto delle quattro rette che da A_1 projettano rispettivamente A_2, A_3, E, P, poniamo

$$\lambda_1 = A_1(A_2 A_3 E P$$

e ~~similmente~~

$$\lambda_2 = A_2(A_3 A_1 E P).$$

I due numeri λ_1, λ_2 individuano già la posizione di P nel piano, ma per simmetria converrà anche considerare il 3° birapporto

$$\lambda_3 = A_3(A_1 A_2 E P).$$

Naturalmente fra i tre numeri λ_1, λ_2, λ_3 passa una relazione che vogliamo dimostrare essere semplicemente la seguente

$$(5) \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Indichiamo le tre rette (lati del triangolo fondamentale)

$$A_2A_3,\quad A_3A_1,\quad A_1A_2$$

con

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3$$

rispettivamente, e siano B_1, B_2, B_3 i punti ove la congiungente EP del punto unità col punto P incontra rispettivamente a_1, a_2, a_3. Segando le quattro rette $A_1(A_2A_3EP)$ colla trasversale EP, pel teorema fondamentale al §7 deduciamo

$$\lambda_1 = (B_3B_2EP)$$

e similmente

$$\lambda_2 = (B_1B_3EP),\quad \lambda_3 = (B_2B_1EP)$$

indi dalla formola (1) §71 si trae appunto la (5)[1].

A causa della (5), indicando con x_1, x_2, x_3 tre numeri convenienti possiamo porre

(6) $\lambda_1 = \frac{x_2}{x_3} = A_1(A_2A_3EP)$, $\lambda_2 = \frac{x_3}{x_1} = A_2(A_3A_1EP)$, $\lambda_3 = \frac{x_1}{x_2} = A_3(A_1A_2EP)$

Dati i tre numeri x_1, x_2, x_3, che basta assumere tutti finiti e non simultaneamente nulli, è fissata la posizione del punto P nel piano; se inv-

---

(1) Si scriva

$$\lambda_1 = (EPB_3B_2),\quad \lambda_2 = (EPB_1B_3) = \frac{1}{(EPB_3B_1)}$$

indi

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(EPB_3B_2)}{(EPB_3B_1)} = (EPB_1B_2) = \frac{1}{(EPB_2B_1)} = \frac{1}{\lambda_3}$$

se è dato P, i numeri x_1, x_2, x_3 sono determinati solo a meno di un fattore comune di proporzionalità. Per ciò i numeri x_1, x_2, x_3 diconsi le coordinate omogenee (projettive) del punto P e si scrive

$$P \equiv (x_1\ x_2\ x_3).$$ (1)

Notiamo che se P cade sopra un lato del triangolo fondamentale a_i, si annulla la corrispondente coordinata x_i. Così, se P cade sopra $a_1 \equiv A_2A_3$, è nulla λ_1 indi x_1, e le altre due coordinate x_2, x_3 sono altresì le coordinate omogenee di P, riguardato come appartenente alla punteggiata A_2A_3, sulla quale scolgansi a punti fondamentali A_2, A_3 ed a punto unità il punto E_1, projezione di E dal centro A_1. In particolare pei vertici A_1, A_2, A_3 si ha:

$$A_1 \equiv (1, 0, 0),\ A_2 \equiv (0, 1, 0),\ A_3 \equiv (0, 0, 1)$$

Se poi P cade in E, si ha evidentemente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

e per ciò

$$E \equiv (1, 1, 1).$$

Come già si è detto da principio, è indifferente che il punto P sia un punto proprio o im-

---

(1) Bisogna sempre rammentare che è anche

$$P \equiv (kx_1, kx_2, kx_3),$$

dove k è una costante qualunque, nè zero nè infinita.

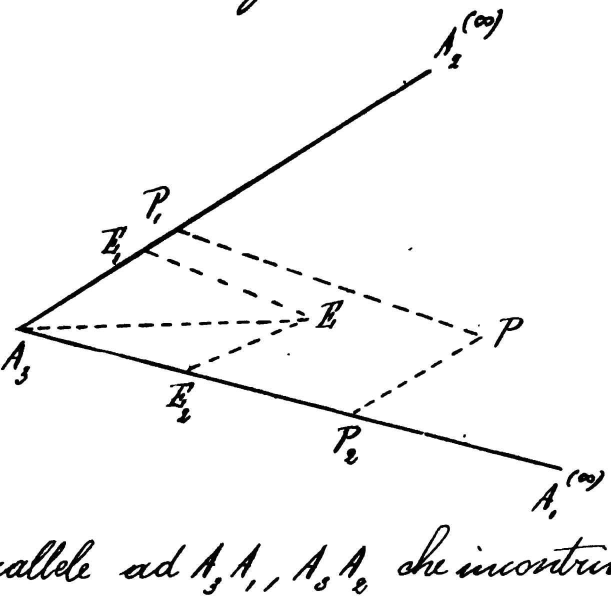
proprio del piano. Così i punti impropri (all'infinito) del piano vengono ad avere, come i punti proprii, coordinate projettive omogenee finite.

§78

Le coordinate cartesiane omogenee

Prendendo particolari configurazioni del triangolo fondamentale ed il punto unità in posizione speciale rispetto a questo, si hanno altrettanti sistemi particolari di coordinate.

Quello che a noi più interessa è di mostrare come le coordinate cartesiane ordinarie rientrino come caso particolare nelle generali coordinate projettive (non omogenee).



Prendiamo infatti i due vertici A_1, A_2 all'infinito restando A_3 a distanza finita e situiamo di più il punto unità E sulla bisettrice dell'angolo in A_2 dei due lati a_1, a_2. Tirando per E e per P le parallele ad A_3A_1, A_3A_2 che incontrino a_1, a_2 rispettivamente.

in E'_1, P_1; $E_1 P_2$, avremo

$$\frac{x_2}{x_3} = A_1 (A_2 A_3 E P) = (A_2 A_3 E_1 P_1)$$

$$\frac{x_1}{x_3} = A_2 (A_1 A_3 E P) = (A_1 A_3 E_2 P_2)$$

ossia, essendo A_1, A_2 all'infinito

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{\overline{A_3 P_1}}{\overline{A_3 E_1}} , \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{\overline{A_3 P_2}}{\overline{A_3 E_2}} .$$

Prendiamo inoltre $\overline{A_3 E_1} = \overline{A_3 E_2} = 1$ e risulterà

$$\frac{x_2}{x_3} = \overline{A_3 P_1} , \quad \frac{x_1}{x_3} = \overline{A_3 P_2} .$$

Se prendiamo adunque un sistema cartesiano, di cui sia A_3 l'origine e sia $A_3 A_1$ l'asse delle x, $A_3 A_2$ quello delle y, avremo precisamente

$$(7) \quad \frac{x_1}{x_3} = x , \quad \frac{x_2}{x_3} = y .$$

Come si vede: __le coordinate cartesiane x, y sono un caso particolare delle coordinate projettive non omogenee $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, per le quali i tre vertici del triangolo fondamentale cadono rispettivamente nell'origine e nei due punti all'infinito degli assi, ed il punto unità sulla bisettrice degli assi.__

Le particolari coordinate projettive omogenee corrispondenti alla formula (7) diconsi __coordina-__

te cartesiane omogenee.

§ 79.

Equazioni della retta.

Ritornando alle generali coordinate projettive, supponiamo che il punto $P \equiv (x_1\ x_2\ x_3)$ percorra una retta (punteggiata), e supponiamo dapprima che questa retta sia a distanza finita e non passi per alcun vertice del triangolo fondamentale. I due raggi A_1P, A_2P descrivono due fasci prospettivi, quindi projettivi. Dunque le rispettive coordinate $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_1}{x_3}$ dei raggi mobili saranno legati da una relazione bilineare in questi rapporti (§ 72), e sarà quindi

$$a x_1 x_2 + b x_2 x_3 + c x_1 x_3 + d x_3^2 = 0,$$

con a, b, c, d costanti. Ma quando il punto P viene sul lato $a_3 \equiv A_1 A_2$ si ha $x_3 = 0$, senza che siano zero nè x_1 nè x_2; per ciò deve essere $a = 0$. La precedente, divisa per x_3, assume una forma lineare ed omogenea, che scriviamo

(1) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

e mentre il punto P descrive la retta le sue coordinate restano costantemente legate dalla rela-

zione (8).(1)

Abbiamo escluso il caso che la retta descritta da P passi per un vertice del triangolo fondamentale; ma se la retta esce p.e. da A_1 si ha lungo di essa $\frac{x_2}{x_3}$ = cost^{te}, che è ancora un'equazione (8) ove $a_1 = 0$.

Inversamente dimostriamo che il luogo dei punti P le cui coordinate soddisfano un'equazione (8) è una retta. Infatti, per la (8), le coordinate $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_1}{x_3}$ dei raggi mobili A_1P, A_2P nei fasci di centri A_1, A_2 sono legate da una relazione lineare intera, ed i raggi descrivono dunque due fasci projettivi. Ma questi sono di più <u>prospettivi</u>, perchè per quella posizione speciale di P in cui si ha

$$x_3 = 0, \quad x_1 : x_2 = a_2 : -a_1$$

---

(1) Propriamente, avendo diviso per x_3, la cosa ~~rimar~~rebbe incerta solo per quella posizione di P in cui $x_3 = 0$ cioè quando P cade sul lato A_1A_2; ma siccome vale per ogni posizione di P, comunque vicina a questa, così vale anche per la posizione limite.

i raggi corrispondenti A_1P, A_2P coincidono in $A_1 A_2 = A_3$; dunque il luogo del punto P intersezione di due raggi corrispondenti è una retta. Concludiamo:

<u>In coordinate projettive omogenee ogni retta è rappresentata da un'equazione lineare omogenea nelle coordinate di un punto mobile sulla retta, e viceversa.</u>

Abbiamo già osservato che anche i punti all'infinito del piano hanno coordinate omogenee determinate. Ora vediamo che: <u>le coordinate di tutti i punti P all'infinito soddisfano un'equazione lineare omogenea</u>

$$(9) \qquad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0.$$

Infatti i raggi mobili (paralleli) A_1P, A_2P descrivono ancora due fasci prospettivi (eguali) e vale quindi il ragionamento precedente. S'intende di qui che, soddisfacendo tutti i punti all'infinito del piano ad un'equazione lineare omogenea, come i punti di una punteggiata propria, essi debbono in ogni questione comportarsi come se formassero una retta. Così è giustificata analiticamente anche la locuzione di una <u>retta all'infinito</u> (o retta impropria) del piano che si dà all'insieme di tutti i punti all'infinito.

Si osservi in particolare: <u>Nel sistema car-</u>

tesiano omogeneo la retta all'infinito ha l'equazione $x_3 = 0$.

§ 80.

Punteggiate nel piano

Affinchè tre punti

$P' \equiv (x_1' x_2' x_3')$, $P'' \equiv (x_1'' x_2'' x_3'')$, $P''' \equiv (x_1''' x_2''' x_3''')$

siano in linea retta è necessario e sufficiente che esista un'equazione lineare omogenea (8), che risulti soddisfatta dalle coordinate di ciascuno dei tre punti. Tale condizione si esprime coll'annullarsi del determinante

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 0$$

formato colle coordinate dei tre punti.

Alla stessa condizione (10) possiamo dare un'altra forma importante. Supponiamo che i due punti P', P'' siano distinti e quindi la matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{Vmatrix}$$

abbia la caratteristica 2. La condizione (10) equivale a questa altra che esistano convenienti moltiplicatori λ, μ pei quali si abbia:

$x_1''' = \lambda x_1' + \mu x_1''$, $x_2''' = \lambda x_2' + \mu x_2''$, $x_3''' = \lambda x_3' + \mu x_3''$

(cf § 33). Ne risulta il teorema:

Le coordinate di ogni punto P in linea retta coi due punti distinti

$$P' \equiv (x_1' \, x_2' \, x_3'), \quad P'' \equiv (x_1'' \, x_2'' \, x_3'')$$

sono date dalle formole

(11) $x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$, $x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$, $x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$,

dove λ, μ sono parametri variabili con P.

È da osservarsi poi il significato di λ, μ in queste formole. Dimostriamo: Nelle formole (11) λ, μ sono le coordinate projettive omogenee di P sulla punteggiata $P'P''$, ove si assumano i punti P', P'' come punti fondamentali ed il punto $E' \equiv (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', x_3' + x_3'')$ come punto unità.

Se infatti projettiamo P dal centro A_1 sul lato a_1 e con $(0, y_2, y_3)$ indichiamo le coordinate della projezione M, abbiamo

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\lambda x_2' + \mu x_2''}{\lambda x_3' + \mu x_3''}.$$

Dunque $\frac{y_2}{y_3}$ è funzione lineare di $\frac{\lambda}{\mu}$ e perciò (§ 72) il birapporto di quattro valori $\frac{\lambda}{\mu}$ è uguale a quello dei quattro corrispondenti valori di $\frac{y_2}{y_3}$,

assia dei quattro punti P corrispondenti. Ora abbiamo

$$\frac{\lambda}{\mu}=\infty \text{ in } P', \quad \frac{\lambda}{\mu}=0 \text{ in } P'', \quad \frac{\lambda}{\mu}=1 \text{ in } E',$$

dunque

$$(P'P''E'P)=(\infty, 0, 1, \frac{\lambda}{\mu})=\frac{\lambda}{\mu}, \quad c.d.d.$$

§ 81.

Coordinate projettive (omogenee) sul piano rigato - Equazioni del punto.

Consideriamo ora il piano come luogo di rette, o il piano rigato. Per determinare la posizione di una retta (elemento) in questa forma possiamo procedere in modo del tutto analogo a quello tenuto nel § 77 pel piano punteggiato; solo dovremo scambiare l'elemento punto coll'elemento retta.

Fissiamo ad arbitrio tre rette a_1, a_2, a_3 che diremo fondamentali, non appartenenti ad un fascio, ed una quarta retta e (retta unità) non passante per alcun vertice del trilatero fondamentale $a_1 a_2 a_3$.

La posizione di una retta qualunque

p nel piano sarà fissata se si conoscono p e sulle due punteggiate coi sostegni a_1, a_2 le posizioni dei punti $a_1 p$, $a_2 p$.

Indicando con $a_1(a_2 a_3 e p)$ il birapporto dei quattro punti

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_1 e,\ a_1 p$$

poniamo

$$\mu_1 = a_2(a_2 a_3\ e p)$$

e similmente

$$\mu_2 = a_2(a_3 a_2\ e p)$$

$$\mu_3 = a_3(a_1 a_2\ e p).$$

Fra i tre numeri μ_1, μ_2, μ_3 ha luogo la relazione analoga alla (5) del §77:

$$(12) \qquad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$$

che si dimostra in modo simile (duale). Indicando invece con A_1, A_2, A_3 i tre vertici

$$a_2 a_3,\ a_3 a_1,\ a_1 a_2$$

del trilatero fondamentale, e con

$$b_1,\ b_2,\ b_3$$

i raggi che projettano dal punto $e p$ rispettivamente A_1, A_2, A_3, abbiamo

$$\mu_1 = (b_3 b_2\ e p),\quad \mu_2 = (b_1 b_3\ e p),\quad \mu_3 = (b_2 b_1\ e p)$$

donde appunto la (12).

A causa di questa relazione (12), indicando con ξ_1, ξ_2, ξ_3 tre numeri convenienti, deter-

minati solo a meno di un fattor comune di proporzionalità; possiamo porre

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = a_1(a_2 a_3 e p), \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = a_2(a_3 a_1 e p), \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = a_3(a_1 a_2 e p).$$

Si diranno $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ le coordinate projettive omogenee della retta p, e scriveremo

$$p \equiv (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3).$$

In particolare si avrà

$$a_1 \equiv (1, 0, 0), \quad a_2 \equiv (0, 1, 0), \quad a_3 \equiv (0, 0, 1)$$

$$e \equiv (1, 1, 1)$$

Supponiamo che la retta $p \equiv (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ descriva un fascio, girando adunque intorno ad un punto M; i due punti $a_1 p$, $a_2 p$ descriveranno due punteggiate projettive, anzi prospettive e, come al §79, se ne concluderà che le coordinate $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ di p soddisferanno costantemente un'equazione lineare omogenea.

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0.$$

Questa si dirà l'equazione del punto M, sostegno del fascio, volendo significare che essa è l'equazione soddisfatta dalle coordinate di tutte le rette per M.

Dopo ciò è facile trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette

$$(\xi_1'\ \xi_2'\ \xi_3'), \quad (\xi_1''\ \xi_2''\ \xi_3''), \quad (\xi_1'''\ \xi_2'''\ \xi_3''')$$

passino per un punto. Essa si esprime sotto forma di determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \\ \xi''_1 & \xi''_2 & \xi''_3 \\ \xi'''_1 & \xi'''_2 & \xi'''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Procedendo precisamente come al §80 (colle considerazioni duali) si deduce: Le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 di ogni retta del fascio delle due $(\xi'_1\, \xi'_2\, \xi'_3)$, $(\xi''_1\, \xi''_2\, \xi''_3)$ sono date da

$$\xi_1 = \lambda \xi'_1 + \mu \xi''_1, \quad \xi_2 = \lambda \xi'_2 + \mu \xi''_2, \quad \xi_3 = \lambda \xi'_3 + \mu \xi''_3,$$

dove λ, μ sono le coordinate omogenee della retta mobile nel fascio prese in queste le due rette $(\xi'_1\, \xi'_2\, \xi'_3)$, $(\xi''_1\, \xi''_2\, \xi''_3)$ come rette fondamentali e la retta $(\xi'_1 + \xi''_1, \xi'_2 + \xi''_2, \xi'_3 + \xi''_3)$ come retta unità.

"§82"

Piano punteggiato e rigato

Consideriamo ora il piano sotto il doppio aspetto di piano punteggiato e di piano rigato, e prendiamo per lati a_1, a_2, a_3 del trilatero fondamentale per le coordinate di retta i lati A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 del triangolo per le coordinate di punti. Proponiamoci il problema:

<u>Data l'equazione di una retta in coordinate di un punto, o quella di un punto in coordinate di retta, trovare le coordinate della retta o quelle del punto.</u>

Le formole richieste dipendono ancora dalla posizione relativa del punto e della retta unità ed assumono la forma più semplice situando E ed e in una speciale relazione tra loro, che dipende dalle considerazioni seguenti.

Cominciamo dal dimostrare il lemma seguente:

<u>Se dai vertici A_1, A_2, A_3 si projetta un punto qualunque P sui lati opposti in P_1, P_2, P_3 e con P_1', P_2', P_3' si indicano i rispettivi coniugati armonici di P_1, P_2, P_3 rispetto alle coppie A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, questi tre punti P_1', P_2', P_3' sono sopra una retta p.</u> Questa retta p dicesi la <u>polare</u> del punto P rispetto al triangolo $A_1A_2A_3$.

Per dimostrare il teorema osserviamo che, se y_1, y_2, y_3 sono le coordinate di P, avremo

$$P_1 \equiv (0, y_2, y_3), \quad P_2 \equiv (y_1, 0, y_3), \quad P_3 \equiv (y_1, y_2, 0).$$

Supponiamo ora $P_1' \equiv (0, x_2, x_3)$; siccome deve essere

$$(A_3A_2P_1P_1') = \left(0, \infty, \frac{y_2}{y_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = -1,$$

ne deduciamo $\frac{x_2}{x_3} = -\frac{y_2}{y_3}$, ossia

$$P'_1 \equiv (0, y_2, -y_3)$$

e similmente

$$P'_2 \equiv (-y_1, 0, y_3), \quad P'_3 \equiv (y_1, -y_2, 0);$$

i tre punti P'_1, P'_2, P'_3 giacciono dunque sulla retta

$$(13) \qquad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0.$$

Così è dimostrato il lemma, ed è trovata in pari tempo l'equazione (13) della polare del punto $(y_1 y_2 y_3)$ rispetto al triangolo fondamentale.

Ciò premesso, prendasi per retta unità <u>e</u> la polare del punto unità $\underline{E}$; l'equazione di <u>e</u> sarà per la (13)

$$(14) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Siano ora E_1, E_2, E_3 le projezioni di E fatte dai centri A_1, A_2, A_3 sopra a_1, a_2, a_3 e siano E'_1, E'_2, E'_3 i loro coniugati armonici situati sulla retta unità <u>e</u>. Consideriamo una retta qualunque $p \equiv (\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ e sia

$$(15) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

la sua equazione; indicando con P_1, P_2, P_3 i punti ove p interseca a_1, a_2, a_3, avremo per de-

finizione

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = a_1(a_2\, a_3\, e_1\, p_1) = (A_3\, A_2\, E'_1\, P_1)$$

Sulla punteggiata a_1 la coordinata projettiva di un punto mobile è la coordinata $\frac{x_2}{x_3}$, che nei punti A_3, A_2 ha i valori $0, \infty$ e nei punti E'_1, P_1 i valori che risultano rispettivamente dalle (14), (15) facendo in queste $x_1 = 0$ cioè i valori $-1, -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$. Così

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = \left(0, \infty, -1, -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

e similmente $\frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$. Si può dunque assumere senz'altro

$$\xi_1 = \alpha_1\,,\quad \xi_2 = \alpha_2\,,\quad \xi_3 = \alpha_3$$

e si ha il semplice resultato:

<u>Presa per retta unità la polare del punto unità, le coordinate della retta sono precisamente i coefficienti della sua equazione in coordinate di punti.</u>

Insomma la relazione

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

fra le coordinate x di un punto e quelle ξ di una retta esprime la condizione <u>d'incidenza</u> del punto colla retta. Se in questa equazione si pensano fisse le ξ e variabili le x si ha l'equazione della retta

(ξ); pensando invece fisse le x e variabili le ξ si ha l'equazione del punto (x).

Osservazione. Se adoperando coordinate cartesiane si scrive l'equazione di una retta (non uscente dall'origine) sotto la forma

$$ux + vy + 1 = 0$$

i coefficienti u, v (1) diconsi le coordinate Plückeriane della retta da Plucker che per primo usò coordinate di retta.

"§ 83"

Trasformazione delle coordinate

Le coordinate di punto e di retta nel piano dipendono essenzialmente dalla scelta dei tre elementi fondamentali e dell'elemento unità. Proponiamoci di ricercare come variano queste coordinate variando gli elementi di riferimento, cerchiamo cioè le formole di trasformazione delle coordinate projettive, nella qual cosa tratteremo ad un tempo della trasformazione delle coordinate di punto

(1) Come si vede u, v non sono altro che le inverse negative $-\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{q}$ dei segmenti staccati dalla retta sugli assi.

to e di quelle di retta supponendo, come al § prec., che la retta unità sia la polare del punto unità.

Sia $A_1'A_2'A_3'$ il nuovo triangolo fondamentale, ed $E'\equiv(x_1'\,x_2'\,x_3')$ il nuovo punto unità, indicando con x' le antiche coordinate di E'. Essendo

$$a_1'\equiv A_2'A_3',\quad a_2'\equiv A_3'A_1',\quad a_3'\equiv A_1'A_2',$$

i lati del nuovo trilatero fondamentale, denotiamo con

$a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ le coordinate (antiche) della retta a_1'

e così con

$a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ le coordinate di a_2'

$a_{31}\ \ a_{32}\ a_{33}$ " " " a_3'

Poichè le tre rette a_1', a_2', a_3' non appartengono ad un fascio sarà (§81)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

I coefficienti di ciascuna linea in questo determinante essendo coordinate omogenee di retta sono determinati solo a meno di un fattore comune di proporzionalità e noi disponiamo di questo fattore in guisa che i tre trinomii

$$a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3',\qquad a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3'$$

$$a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3'$$

siano ciascuno $=1$, ciò che è possibile perchè nessuno di questi tre trinomi può annullarsi, altrimenti il nuovo punto unità E' cadrebbe sopra uno dei lati a'_1, a'_2, a'_3 ciò che è escluso. Così avremo

$$(16)\quad \begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = 1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = 1 \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = 1 . \end{cases}$$

Ora essendo P un punto qualunque del piano, indichiamo con x_1, x_2, x_3 le sue antiche coordinate, con y_1, y_2, y_3 le nuove. Abbiamo per definizione

$$\frac{y_2}{y_3} = A'_1(A'_2 A'_3 E' P)$$

ed il secondo membro è il birapporto delle quattro rette

$$a'_3 \equiv A'_1 A'_2, \quad a'_2 \equiv A'_1 A'_3, \quad A'_1 E', \quad A'_1 P.$$

Le coordinate delle prime due sono, nelle nostre notazioni,

$$a'_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}), \quad a'_2 \equiv (a_{21}, a_{22}, a_{23}),$$

onde ciascuna delle altre due ha coordinate della forma

$$(\lambda a_{31} + \mu a_{21}, \lambda a_{32} + \mu a_{22}, \lambda a_{33} + \mu a_{23})$$

e quindi l'equazione

$$(17)\quad (\lambda a_{31} + \mu a_{21})X_1 + (\lambda a_{32} + \mu a_{22})X_2 + (\lambda a_{33} + \mu a_{23})X_3 = 0$$

dove con X abbiamo indicato le coordinate correnti

di punto. Ora, poichè la $A_1'E'$ passa per $E' \equiv (x_1' \, x_2' \, x_3')$ e la $A'P$ e $(P \equiv (x_1 \, x_2 \, x_3)$ i valori di $\frac{\lambda}{\mu}$ per $A_1'E'$, $A'P$ si calcolano dalla (17) ponendovi una prima volta $X_i = x_i'$ una seconda $X_i = x_i$ (per $i = 1, 1, 3$).

Osservando le (16) troviamo così

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1 \text{ per la retta } A_1'E'$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3}{a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3} \text{ per } A_1'P;$$

d'altronde

$$\frac{\lambda}{\mu} = \infty \text{ per } A_1'A_2', \quad \frac{\lambda}{\mu} = 0 \text{ per } A_1'A_3'$$

e quindi

$$\frac{y_2}{y_3} = A_1'(A_2'A_3'E'P) = \left(\infty, 0, -1, -\frac{a_{21} x_1 \, a_{22} x_2 + a_{23} x_3}{a_{31} x_1 \, a_{32} x_2 + a_{33} x_3}\right),$$

cioè

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3}{a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3}.$$

Similmente avremo

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3}{a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3};$$

e, poichè y_1, y_2, y_3 sono coordinate omogenee, le cercate formole di trasformazione delle coordinate

(di punto) potranno scriversi senz'altro:

$$(IV)\quad\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 . \end{cases}$$

Concludiamo: Nelle formole di trasformazione delle coordinate projettive omogenee di punto le nuove coordinate si esprimono per funzioni lineari intere ed omogenee delle antiche con determinante (modulo della sostituzione) diverso dal zero.

Viceversa è chiaro che qualunque sostituzione lineare omogenea (IV), con modulo diverso da zero, equivale ad un cangiamento di coordinate, il nuovo trilatero fondamentale essendo quello delle tre rette

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}),\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}),\ (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

e il nuovo punto unità E' quello le cui coordinate x'_i si calcolano dalle (16).

Le formole di trasformazione (IV) possono naturalmente scriversi risolute rispetto alle antiche coordinate x_i; indicando al solito con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante delle a, queste formole inverse, trascurando nelle coordinate omogenee x_i un fattore di proporzionalità, possono scriversi

$$(IV^*)\quad \begin{cases} x_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\ x_2 = A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \\ x_3 = A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3 . \end{cases}$$

Di qui si deducono facilmente le formole di trasformazione per le coordinate di retta. Siano infatti $(\xi_1, \xi_2\ \xi_3)$ le coordinate antiche, (η_1, η_2, η_3) le coordinate nuove di una medesima retta p, del resto qualunque. La retta p avrà per antica equazione

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

e per nuova

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0$$

e queste due equazioni dovranno risultare identiche tenendo conto delle (IV) o (IV*).

Troviamo così <u>per la formola di trasformazione delle coordinate di retta</u>:

$$(V)\quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 \\ \xi_2 = a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 \\ \xi_3 = a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 \end{cases}$$

colle inverse:

$$(V^*)\quad \begin{cases} \eta_1 = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 \\ \eta_2 = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 \\ \eta_3 = A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 . \end{cases}$$

Osserviamo ora che, essendo le coordinate cartesiane x, y un caso particolare delle projettive

(§ 78), si potranno scrivere le formole del passaggio da un sistema cartesiano al più generale proiettivo p. e. sotto la forma seguente:

$$(VI)\quad \begin{cases} x_1 = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \\ x_2 = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} \\ x_3 = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} \end{cases}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

colle inverse

$$(VI^*)\quad \begin{cases} x = \dfrac{A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3}{A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3} \\[2ex] y = \dfrac{A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + A_{32} x_3}{A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3} \end{cases}.$$

Così, per definire le coordinate proiettive si potrebbe anche senz'altro adoperare le formole (VI). Si osserverà che scritte queste formole di passaggio da un sistema proiettivo al cartesiano si ha subito per l'equazione della retta all'infinito del piano

$$A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3 = 0$$

§ 84

Equazioni delle nuove punteggiate

Consideriamo un punto $P \equiv (x_1\ x_2\ x_3)$ mo-

bile nel piano che descriva una linea. Le considerazioni stesse che si fanno nel caso delle coordinate cartesiane (§ 21) dimostrano anche qui che i rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, dai quali risulta fissata la posizione del punto, resteranno costantemente legate da una relazione

$$(a) \qquad f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0$$

dipendente dalla natura della curva. Inversamente il luogo di tutti i punti del piano le cui coordinate verificano una medesima equazione (a) è una curva. Del resto si possono dedurre questi resultati da quelli già stabiliti nel caso cartesiano, servendosi delle formule (VI), (VI*) di passaggio dal sistema cartesiano al generale projettivo.

Se la curva è algebrica, la f nella (a) si potrà prendere razionale ed intera nei rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ e se la f è di grado $\underline{m}$ in questi rapporti, moltiplicandola per x_3^m si ridurrà ad essere razionale intera ed <u>omogenea</u> di grado $\underline{m}$ nelle tre variabili $x_1\ x_2\ x_3$, cioè della forma

$$(1)\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m,$$

dove $A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ indica il coefficiente generico e nella somma Σ gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ percorrono tutti i numeri interi positivi o nulli tali che sia sempre $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$.

Una tale funzione φ dicesi una forma di grado m, onde risulta: L'equazione di una curva di grado m in coordinate omogenee $x_1\, x_2\, x_3$ di punto è data dall'eguagliare a zero una forma di grado m in x_1, x_2, x_3.

Siamo ora in grado di assegnare il significato completo geometrico del grado m di una curva algebrica, che al § 24 abbiamo potuto soltanto accennare. Prima di tutto è evidente che il grado m della curva è indipendente dagli elementi di riferimento, perchè le formole di trasformazione sono date da sostituzioni lineari ed omogenee (§ prec.).

Ed ora supposto di avere una curva di grado m, rappresentata dall'equazione

$$(c)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dove la f è una forma di grado m nelle variabili x_1, x_2, x_3 cerchiamo in questi punti (reali

ed immaginarii) la curva è incontrata da una retta r del piano. Se consideriamo la retta r come congiungente due suoi punti

$$(x_1' \, x_2' \, x_3'), \, (x_1'' \, x_2'' \, x_3''),$$

le coordinate di un punto qualsiasi della retta saranno (§ 80)

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'';$$

e perchè questo punto appartenga alla curva sarà necessario e sufficiente che sostituendo questi valori nella equazione (c) della curva, questa ne risulti soddisfatta.

Si ottiene così fra λ, μ una relazione della forma

$$(d) \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

dove φ è una <u>forma</u> di grado m in λ, μ.

Dividendo la (d) per μ^m si ha un'equazione di grado <u>m</u>(1) nel rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ e l'algebra ci dice che una tale equazione ha precisamente <u>m</u> radici fra reali ed immaginarie, computandovi ogni

---

(1) L'equazione in $\frac{\lambda}{\mu}$ sarebbe di grado < m nel solo caso che si annullasse il coefficiente di λ^m; ma questo è $f(x_1' x_2' x_3')$ ed allora il punto P' di r sarebbe già sulla curva, caso che possiamo sempre evitare (perchè ben inteso la retta r non faccia parte della linea).

radice a seconda del suo grado di moltiplicità).

Concludiamo adunque A) Una curva piana di grado m è incontrata da ogni retta del piano (che non faccia parte della curva) precisamente in m punti fra reali od immaginarii, distinti o coincidenti).

§ 85.

Inviluppi di rette - Principio di dualità

Possiamo ripetere le considerazioni del § precedente, nel senso duale, riguardando come elemento del piano la retta e supponendo che una retta (ξ_1, ξ_2, ξ_3) si muova con continuità nel piano assumendo una semplice infinità di posizioni. I rapporti $\frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ rimarranno allora costantemente legati da una relazione

$$\Phi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right) = 0.$$

Una tale totalità di rette dicesi un inviluppo; e si dimostra rigorosamente, coi principii del calcolo infinitesimale, che almeno sotto certe condizioni per la funzione Φ (condizioni sempre

verificate in tutti i casi delle applicazioni) quest'inviluppo non è altro che l'insieme di tutte le tangenti (1) di una curva.

Supposto l'inviluppo algebrico, la sua equazione si otterrà eguagliando a zero una forma nelle tre variabili $\xi_1 \xi_2 \xi_3$.

Il grado m di questa equazione dicesi la classe dell'inviluppo; il suo significato geometrico è dato dal teorema:

La classe di un inviluppo (algebrico) è il numero delle rette dell'inviluppo (reali od immaginarie) che passano da un punto arbitrario del piano.

---

(1) Se preso un punto fisso A sopra una curva C (ordinaria) si considera un punto B della curva prossimo ad A e si tira la corda AB, questa, facendo tendere B lungo la curva verso A, tende verso una posizione limite che dicesi la tangente in A alla curva C. Quando la curva C è algebrica, si può prendere una definizione più elementare per la tangente t in un punto A. La t è tangente in A quando un secondo punto d'intersezione di t con C cade in A, ossia algebricamente quando la radice in $\frac{\lambda}{\mu}$ dell'equazione (d) corrispondente al punto A è almeno doppia.

Ciò si dimostra precisamente nel modo tenuto al § prec. per assegnare il significato del grado per una curva algebrica. Considerando il punto come centro di un fascio, le coordinate di una retta mobile nel fascio saranno

$$(18) \quad \xi_1 = \lambda \xi_1' + \mu \xi_1'', \quad \xi_2 = \lambda \xi_2' + \mu \xi_2'', \quad \xi_3 = \lambda \xi_3' + \mu \xi_3''$$

dove $(\xi_1' \xi_2' \xi_3')$, $(\xi_1'' \xi_2'' \xi_3'')$ sono due particolari rette del fascio. Esprimendo che la retta (18) appartiene all'inviluppo abbiamo un equazione di grado m in $\frac{\lambda}{\mu}$, ecc.

Da quanto siamo venuti esponendo fin qui si può trarre la dimostrazione analitica del così detto principio di dualità nel piano. Secondo questo principio, da ogni teorema relativo a proprietà descrittive delle figure se ne deduce un secondo (correlativo) scambiando dappertutto l'elemento punto coll'elemento retta, colla qual cosa ad ogni curva punteggiata di grado m viene a sostituirsi un inviluppo di rette di classe m.

L'accennata dimostrazione si fonda sulla doppia interpretazione geometrica che, secondo quanto abbiamo visto alla fine del § 82, possiamo dare all'equazione

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

e cioè: come equazione della retta o come equazione del punto secondo che vi si riguardano come fisse le ξ_i e variabili le x, o inversamente.

Poniamo ora che per dimostrare analiticamente un certo teorema, di natura projettiva, siansi introdotte certe serie di coordinate di punti

$$x_1, x_2, x_3 ; \quad y_1, y_2, y_3 ; \quad z_1, z_2, z_3 \ldots$$

e certe serie di coordinate di retta

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3 ; \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$$

ed effettuate opportune trasformazioni sulle formole che vi si presentano.

La parte analitica della trattazione rimane immutata se si dà alle $x, y, z, \ldots$ il significato di coordinate di rette ed alle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ quello di coordinate di punti.

Ma nella interpretazione geometrica finale vengono dappertutto scambiati gli elementi punto e retta ed in luogo del teorema primitivo si ha il suo correlativo.

"§ 86"

Projettività nelle forme di 2ª specie

Come per le forme di 1ª, così per quelle

di 2ª specie, le formole di trasformazione delle coordinate (§83) sono suscettibili di una seconda ed importante interpretazione. Esse possono riguardarsi come formole di <u>projettività</u>.

Per fissare le idee, consideriamo due piani punteggiati π, π' e stabiliamo in ciascuno di essi un sistema di coordinate di punto $(x_1 x_2 x_3)$, $(y_1 y_2 y_3)$. Fra le coordinate di due punti $P \equiv (x_1 x_2 x_3)$, $P' \equiv (y_1 y_2 y_3)$ presi rispettivamente su π, π' stabiliamo relazioni della forma (IV) §83, che risolute rispetto alle x danno le (IV*).

In forza di queste formole è stabilita una corrispondenza di punto a punto fra i due piani che dicesi un'<u>omografia</u> od anche una <u>collineazione</u> o in fine una <u>projettività</u> per le ragioni che andiamo ora ad esporre.

Se il punto P descrive su π la retta

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

il punto P' descriverà, a causa delle (IV*), nel piano π' l'altra retta

$$(A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3)y_1 + (A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3)y_2 + \\ + (A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3)y_3 = 0,$$

le cui coordinate $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ sono dunque date precisamente dalle (V*) §83. Tali due rette $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$,

$(\eta_1\, \eta_2\, \eta_3)$ di π, π' diconsi corrispondenti;[1] e come le y si esprimono per le ξ colle (V^*), così le ξ si esprimeranno per le y colle (V).

Ad ogni curva C, descritta in π da un punto P, corrisponderà in π' una curva C', descritta dal punto corrispondente P' ed è chiaro, per la linearità delle formole (IV), (IV^*) che:
Ad una curva algebrica di grado n in π corrisponde una curva algebrica dello stesso grado di π'.

Correlativamente: Un inviluppo di classe n sopra π ha per corrispondente un inviluppo di classe n sopra π'.

Consideriamo ora in π, π' due punteggiate corrispondenti. Se

$$P_1 \equiv (x_1'\, x_2'\, x_3') \quad , \quad P_2 \equiv (x_1''\, x_2''\, x_3'')$$

sono due punti della prima e

$$P_1' \equiv (y_1'\, y_2'\, y_3') \quad , \quad P_2' \equiv (y_1''\, y_2''\, y_3'')$$

i corrispondenti della seconda, saranno

$$\lambda x_1' + \mu x_1'' \,,\; \lambda x_2' + \mu x_2'' \,,\; \lambda x_3' + \mu x_3''$$

le coordinate di un punto qualunque P della

---

(1) Il nome di collineazione proviene appunto da ciò che ad ogni linea retta di π corrisponde una linea retta di π'.

1ª e per le (II)

$$\lambda y_1' + \mu y_1'' \,,\quad \lambda y_2' + \mu y_2'' \,;\quad \lambda y_3' + \mu y_3''$$

saranno le coordinate del punto corrispondente sulla seconda. Poichè sulle due punteggiate punti corrispondenti hanno la stessa coordinata projettiva $\frac{\lambda}{\mu}$ le <u>due punteggiate saranno projettive</u> (§72). Correlativamente segue dalle (V) che ad ogni fascio di rette in π corrisponde un fascio projettivo in π', onde possiamo dire in generale:

<u>Due forme di 1ª specie che si corrispondono in due piani omografici sono projettive.</u>

Perciò appunto l'omografia dicesi anche projettività ed i piani diconsi projettivi.

Osserviamo che per le (II) la relazione di projettività fra due piani dipende da 8 costanti, cioè dai rapporti di 8 delle a_{ik} alla nona (supposto ≠ 0). Ne risulta che fissate quattro coppie di punti corrispondenti (tre a tre non allineati) la projettività è individuata, ciò che si vede anche subito geometricamente.

§87.

Piani omografici sovrapposti - Elementi uniti

Supponiamo ora i due piani omografici

π, π' sovrapposti e domandiamo se vi sono punti (rette) che corrispondano a sè stessi che diremo quindi punti uniti (rette unite).

È opportuno nel caso attuale scegliere sui piani sovrapposti gli stessi elementi di riferimento; allora per ogni punto unito dovremo avere

$$y_1 = \rho x_1, \quad y_2 = \rho x_2, \quad y_3 = \rho x_3,$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità.

Sostituendo alle y i loro valo π), abbiamo le equazioni

$$(19) \quad \begin{cases} (a_{11} - \rho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \rho) x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \rho) x_3 = 0 \end{cases}$$

dalle quali, eliminando le x, risulta l'equazione di 3° grado in ρ

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \rho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

la quale ha tre radici. E se supponiamo l'omografia reale, cioè reali i coefficienti a_{ik}, una almeno di queste radici sarà reale e le altre due o reali o coniugate immaginarie.

Inversamente, se ρ_1 è una radice della (20), introdotta per ρ nelle (19), le rende compatibili e precisamente, secondo che la caratteristica

del determinante (nullo)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho_1, & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho_1 \end{vmatrix}$$

è = 2, ovvero = 1.[1] Le (19) si riducono a *due* distinte, ovvero *ad una sola*. Nel primo caso, che è il generale, alla radice ρ_1 della (20) corrisponde un solo punto unito; nel secondo infiniti punti uniti costituenti una punteggiata.

In generale adunque: *In due piani omografici sovrapposti si hanno tre punti uniti e correlativamente tre rette unite (le congiungenti due a due dei punti uniti).*

Il caso particolare in cui vi siano infiniti punti uniti e quindi un'intera punteggiata di punti uniti è il caso *dell'omologia*.

Ma noi qui non possiamo ulteriormente estenderci sulla trattazione analitica dell'omografia fra due forme di 1ª specie e rimandiamo il lettore all'esposizione completa che ne ho-

---

(1) La caratteristica non può essere = 0, cioè non possono annullarsi tutti gli elementi del determinante che nel solo caso dell'*omografia* identica, in cui ogni punto coincide col suo corrispondente.

verrà nei trattati (1)

§ 88.

Movimenti di un piano in sè stesso - Punti ciclici.

Supponiamo di muovere un piano π in sè stesso; ogni suo punto P si trasporterà in un altro punto P' del piano stesso. Prendiamo su π un sistema di assi di Cartesiani ortogonali e con (x, y) indichiamo le coordinate di un punto qualsiasi P con (X, Y) quelle del punto P' in cui si trasporta P dopo il movimento. Se immaginiamo che gli assi Ox, Oy partecipino al movimento e assumiamo come nuovi assi le loro posizioni dopo il movimento, è chiaro che, giacendo P' rispetto ai nuovi assi come P rispetto agli antichi, saranno x, y le nuove coordinate di P' ed X, Y le antiche. Dunque X, Y saranno legate ad x, y dalle formule di trasformazione degli assi ortogonali

(1) Cf. p. e. D'Ovidio - Geometria analitica (3ª edizione - 1905) e Castelnuovo - Lezioni di geometria analitica e projettiva Vol. I - 1903.

$$\begin{cases} X = \cos\alpha\, x - \operatorname{sen}\alpha\, y + a \\ Y = \operatorname{sen}\alpha\, x + \cos\alpha\, y + b, \end{cases}$$

che, adoperando coordinate cartesiane omogenee (§ 78), scriviamo:

$$\begin{cases} y_1 = \cos\alpha\, x_1 - \operatorname{sen}\alpha\, x_2 + a\, x_3 \\ y_2 = \operatorname{sen}\alpha\, x_1 + \cos\alpha\, x_2 + b\, x_3 \\ y_3 = x_3 . \end{cases}$$

Siamo dunque nel caso di due piani omografici sovrapposti; ricerchiamo i punti uniti, cioè i punti immobili nel piano.

L'equazione (19) diventa qui

$$(21) \quad \begin{cases} (\cos\alpha - \rho)\, x_1 - \operatorname{sen}\alpha\, x_2 + a\, x_3 = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\, x_1 + (\cos\alpha - \rho) + b\, x_3 = 0 \\ (1-\rho)\, x_3 = 0 . \end{cases}$$

L'equazione di 3° grado (23) si decompone quindi in

$$(1-\rho)(\rho^2 - 2\cos\alpha\cdot\rho + 1) = 0$$

ed ha l'unica radice reale $\rho_1 = 1$ e le due immaginarie coniugate (1)

$$\rho_2 = e^{i\alpha}, \quad \rho_3 = e^{-i\alpha}.$$

La radice reale $\rho_1 = 1$, sostituita nelle (21), rende identica la terza delle (21) e le altre due,

(1) Però se $\alpha = 0$ (caso della traslazione) si ha un'unica radice (tripla) $\rho = 1$

supposto dapprima $\alpha \neq 0$, sono distinte e danno:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a(1-\cos\alpha) - b \operatorname{sen}\alpha : a \operatorname{sen}\alpha + b(1-\operatorname{sen}\alpha) : 2(1-\cos\alpha).$$

Vi è dunque un unico punto reale unito, le cui coordinate ordinarie sono

$$x_0 = \frac{a(1-\cos\alpha) - b \operatorname{sen}\alpha}{2(1-\cos\alpha)}, \quad y_0 = \frac{a \operatorname{sen}\alpha + b(1-\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)};$$

questo punto $(x_0 y_0)$ è il così detto <u>centro di rotazione</u>, potendosi portare il piano dalla posizione iniziale alla finale con una rotazione attorno a questo centro immobile.

Ma se $\alpha = 0$, indi $\cos\alpha = 1$, $\operatorname{sen}\alpha = 0$, le (21) si riducono all'unica $x_3 = 0$, che è l'equazione della retta all'infinito. In questo caso ogni punto all'infinito resta fisso come è chiaro anche da ciò che riducendosi le formole del movimento a

$$X = x + a, \quad Y = y + b,$$

questo diventa una <u>traslazione</u>.

Consideriamo ora i punti uniti (immaginari) corrispondenti alle altre due radici

$$\rho_2 = e^{i\alpha}, \quad \rho_3 = e^{-i\alpha}.$$

Le (21) danno allora

$$\frac{x_1}{x_2} = \mp i, \quad x_3 = 0 \text{ (1)}$$

---

(1) Propriamente la relazione $\frac{x_1}{x_2} = \pm i$ risulta solo nel-

e i due punti uniti sono quelli di coordinate omogenee

$$(1, i, 0) \quad , \quad (1, -i, 0).$$

Essi sono sulla retta all'infinito $x_3 = 0$ immaginarii coniugati ed hanno coordinate indipendenti dal particolare movimento considerato. Questi due punti fissi all'infinito, che in qualunque movimento rimangono immobili, diconsi <u>i punti ciclici</u> del piano per la ragione che ora andiamo a dire.

Ogni circolo del piano ha un'equazione della forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ovvero in coordinate omogenee

$$(x_1 - a x_3)^2 + (x_2 - b x_3)^2 = r^2 x_3^2.$$

Se ne cerchiamo le intersezioni colla retta all'infinito $x_3 = 0$, troviamo

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

cioè $x_1 : x_2 = 1 : i$; dunque: <u>Ogni circolo del piano passa per i due punti ciclici</u>.

La considerazione dei punti ciclici ha

---

l'ipotesi di $\alpha \neq 0$; ma se $\alpha = 0$ allora qualunque punto all'infinito è fisso, quindi anche i punti ciclici considerati più avanti nel testo.

grande importanza in tutte le proprietà metriche angolari. Noi già al §76 abbiamo dimostrata, colla formola di Laguerre, la proprietà fondamentale che riduce la nozione d'angolo a quella di birapporto, appunto colla introduzione dei punti ciclici. E infatti se consideriamo le due rette che dall'origine vanno ai punti ciclici, esse hanno per equazione

$$y = i\,x, \quad y = -i\,x;$$

esse sono precisamente i raggi doppi dell'involuzione ortogonale ossia le rette cicliche (§75). Possiamo dunque dire: <u>Sulla retta all'infinito ogni involuzione di coppie ortogonali di raggi in un fascio segna un'involuzione di punti che ha per elementi uniti i due punti ciclici</u>.

"§89"

Coordinate projettive nello spazio punteggiato

Possiamo ora a trattare delle coordinate projettive omogenee nelle forme di 3ª specie (spazio punteggiato e spazio di piani), nella qual cosa ci limiteremo del resto a poche nozioni fondamentali, chè la trattazione analitica procedendo

qui in modo del tutto simile alle forme di 2ª specie ha appena bisogno di essere accennata.

Nello spazio punteggiato prendiamo cinque punti di riferimento

$$A_1, A_2, A_3, A_4, E$$

soggetti alla sola condizione che quattro qualunque di essi non siano in un piano. I primi quattro A_1, A_2, A_3, A_4 si diranno i <u>punti fondamentali</u> ed il tetraedro che li ha per vertici il <u>tetraedro fondamentale</u>; il punto E si dirà il punto <u>unità</u>. Indicheremo poi con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le faccie (piani) del tetraedro fondamentale opposte rispettivamente ai vertici A_1, A_2, A_3, A_4.

Per definire la posizione di un punto P nello spazio basterà conoscere i tre piani che projettano P da tre spigoli del tetraedro fondamentale non uscenti dallo stesso vertice. Ora per fissare p. e. la posizione del piano che projetta P dallo spigolo $A_1 A_4$ basterà conoscere il birapporto λ_1 dei quattro piani che projettano da $A_1 A_4$ i quattro punti A_2, A_3, E, P; poniamo

$$\lambda_1 = A_1 A_4 (A_2 A_3 E P).$$

Per simmetria consideriamo tutti 6 i birapporti analoghi relativi ai 6 spigoli, che

indichiamo con

$$\begin{cases} \lambda_1 = A_1 A_4 (A_2 A_3 E P) & , \quad \mu_1 = A_2 A_3 (A_1 A_4 E P) \\ \lambda_2 = A_2 A_4 (A_3 A_1 E P) & , \quad \mu_2 = A_3 A_1 (A_2 A_4 E P) \\ \lambda_3 = A_3 A_4 (A_1 A_2 E P) & , \quad \mu_3 = A_1 A_2 (A_3 A_4 E P). \end{cases}$$

Naturalmente bastano già tre di questi numeri, p. e. μ_1, μ_2, μ_3, per fissare la posizione di P nello spazio, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ saranno funzioni di μ_1, μ_2, μ_3 che si tratta in primo luogo di calcolare. Perciò indichiamo con B_1, B_2, B_3, B_4 i punti ove la congiungente di E con P incontra le facce $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ del tetraedro. Troviamo subito:

$$\lambda_1 = (B_3 B_2 E P) \quad , \quad \mu_1 = (B_4 B_1 E P)$$
$$\lambda_2 = (B_1 B_3 E P) \quad , \quad \mu_2 = (B_4 B_3 E P)$$
$$\lambda_3 = (B_2 B_1 E P) \quad , \quad \mu_3 = (B_4 B_3 E P);$$

ora si ha (§ 71, (1))

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} = \frac{(E P B_4 B_2)}{(E P B_2 B_3)} = (E P B_3 B_2) = (B_3 B_2 E P)$$

e perciò $\lambda_1 = \frac{\mu_2}{\mu_3}$, e analogamente

$$\lambda_2 = \frac{\mu_3}{\mu_1} \ , \ \lambda_3 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Se prendiamo quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4, determinati solo a meno di un fattore comune di proporzionalità, tali che si abbia

$$\mu_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad \mu_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad \mu_3 = \frac{x_3}{x_4},$$

ne seguirà

$$\lambda_1 = \frac{x_2}{x_3}, \quad \lambda_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \lambda_3 = \frac{x_1}{x_2}.$$

Badando al significato del birapporto λ, μ si vede che indicando con i, k, l, m una permutazione qualunque dei quattro indici 1, 2, 3, 4 si avrà in generale

$$(22) \qquad A_i A_k (A_l A_m E P) = \frac{x_l}{x_m}.$$

I quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4, che coi loro rapporti individuano la posizione del punto P nello spazio, si diranno le coordinate projettive omogenee del punto P.

Si osservi che se un punto P è situato sopra una faccia del tetraedro, p. e. la α_4 sarà corrispondentemente $x_4 = 0$ ed x_1, x_2, x_3 saranno, nel piano α_4, le coordinate projettive omogenee di P, preso $A_1 A_2 A_3$ come triangolo fondamentale ed il punto E_4, projezione di E del piano α_4 dal centro A_4, per punto unità; analogamente dicasi per le altre facce. Un punto situato sopra uno spigolo $A_i A_k$ del tetraedro avrà zero le altre due coordinate x_l x_m e le x_i, x_k saranno le

coordinate projettive omogenee di P sulla punteggiata $A_i A_k$ presi i punti A_i, A_k per punti fondamentali e per punto unità il punto E_{ik} projezione di E sullo spigolo $A_i A_k$ fatta dallo spigolo opposto $A_l A_m$.

Si osservi in particolare che i punti fondamentali ed il punto E hanno le coordinate seguenti

$$A_1 \equiv (1,0,0,0),\quad A_2 \equiv (0,1,0,0),\quad A_3 \equiv (0,0,1,0),\quad A_4 \equiv (0,0,0,1)$$
$$E \equiv (1,1,1,1)$$

__Osservazione__. Vediamo anche qui come le coordinate cartesiane ordinarie possano considerarsi come un caso particolare delle projettive (cf. § 78). Essendo $O(x,y,z)$ un sistema cartesiano, consideriamo un sistema di coordinate projettive in cui il vertice A_4 cada in O i vertici A_1, A_2, A_3 ordinatamente nei punti all'infinito degli assi Ox, Oy, Oz rispettivamente ed in fine prendiamo per punto unità E quello colle coordinate cartesiane $(1,1,1)$; allora si vedrà subito che si ha

$$(23)\qquad x = \frac{x_1}{x_4},\quad y = \frac{x_2}{x_4},\quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Come per il piano, le particolari coordinate projettive omogenee corrispondenti a queste formole (23) si diranno le coordinate car-

tesiane omogenee.

§ 90.
Equazione del piano e punteggiate nello spazio

Consideriamo dapprima un piano π che passi p. e. pel vertice A_4 del tetraedro fondamentale; esso interseca la faccia α_4 in una retta che se questo piano avrà un'equazione della forma

$$(24) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Un punto qualunque P di π si projetta da A_4 su α_4 in un punto P_4 che ha le stesse tre prime coordinate di P; dunque le coordinate di un punto qualunque di π soddisfano la (24). Viceversa un punto qualunque le cui coordinate soddisfano la (24) si projetta da A_4 su α_4 in un punto P_4 che giace sulla retta (24); per ciò P è su π. Dunque la (24) è nello spazio l'equazione del piano π.

In generale un piano che passi pel vertice A_i ha un'equazione lineare omogenea in cui manca il termine colla x_i.

Prendiamo ora una retta arbitraria r nello spazio e projettiamola dai quattro punti

fondamentali; due almeno di questi piani sono distinti e possono essere presi per individuare la retta. Da quanto si è dimostrato ora segue dunque: *Una retta qualsiasi dello spazio è rappresentata dal sistema di due equazioni lineari omogenee nelle coordinate.*

Risolvendo queste due equazioni rispetto a due delle variabili, potremo dare alle equazioni della retta, p. e. la forma

$$(25) \qquad \begin{cases} x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2 . \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ costanti})$$

Supponiamo che siano $(x_1' \, x_2' \, x_3' \, x_4')$, $(x_1'' \, x_2'' \, x_3'' \, x_4'')$, o come scriveremo più brevemente $P' \equiv (x_i')$, $P'' \equiv (x_i'')$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, due punti distinti della retta; sarà necessariamente $\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \neq 0$, altrimenti per la (25) sarebbero zero tutti i minori di 2° ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{Vmatrix}$$

ed i punti P' P'' coinciderebbero. Ciò posto, essendo $P \equiv (x_i)$ un punto qualunque della retta, potremo determinare i moltiplicatori λ, μ in guisa che risulti

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$$
$$x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$$

e allora risulterà dalle (25)

$$x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3 \,, \quad x_4 = \lambda x'_4 + \mu x''_4 .$$

Ne deduciamo adunque: Se $P' \equiv (x'_i)$, $P'' \equiv (x''_i)$ sono due punti distinti ogni punto $P \equiv (x_i)$ allineato con P', P'' ha coordinate della forma

$$(26) \qquad x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Precisamente come al § 80 vediamo che: in queste formole (26) i parametri λ, μ sono le coordinate omogenee projettive del punto P sulla punteggiata $P'P''$, presi P', P'' a punti fondamentali e pel punto unità

$$E' \equiv (x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, x'_3 + x''_3, x'_4 + x''_4).$$

Siano ora $P' \equiv (x'_i)$, $P'' \equiv (x''_i)$, $P''' \equiv (x'''_i)$ tre punti dello spazio non allineati. Essi individuano un piano $P'P''P'''$ ed ogni punto P di questo piano è allineato con $P''' \equiv (x'''_i)$ e con un punto $(\lambda x'_i + \mu x''_i)$ della retta $P'P''$. Dunque pel resultato precedente abbiamo:

Le coordinate x_i di ogni punto P del piano $P'P''P'''$ sono date dalle formole

$$(27) \qquad x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i + \nu x'''_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

con λ, μ, ν parametri arbitrarî.

Facilmente si vede inoltre che λ, μ, ν sono le coordinate projettive omogenee di P sul piano $P'P''P'''$ ove si prenda a triangolo fondamentale

$P'P''P'''$ ed a punto unità il punto $(x_i' + x_i'' + x_i''')$

Ed ora dalle (27) segue subito che le coordinate del punto P mobile sul piano $P'P''P'''$ soddisfano l'equazione lineare omogenea nelle coordinate correnti

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Viceversa ogni tale equazione lineare omogenea

$$(28) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

rappresenta un piano.

§ 91.

Coordinate nello spazio di piani

Partendo dall'ultimo risultato conseguito, cerchiamo il significato geometrico dei coefficienti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ nell'equazione (28) di un piano π. Seguendo la via tracciata dalle analoghe ricerche per l'equazione della retta nel piano (§ 81) vedremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ hanno, rispetto al piano π, un significato perfettamente duale delle coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4$ di un punto; per ciò diremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ sono <u>le coordina-</u>

te del piano π ed avremo il resultato finale: Le coordinate di un piano sono i coefficienti della sua equazione in coordinate di punti.

Cominciamo dal dimostrare il lemma seguente. Da ogni spigolo $A_i A_k$ del tetraedro fondamentale proiettiamo un punto qualunque $P \equiv (y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ sullo spigolo opposto $A_l A_m$ e diciamo P_{lm} la sua proiezione; le coordinate di P_{lm} sono (§ 89)

$$x_i = 0\,,\ x_k = 0\ ,\ x_l = y_l\,,\ x_m = y_m.$$

Indichiamo con P'_{lm} il coniugato armonico di P_{lm} rispetto ad A_l, A_m; le coordinate di P'_{lm} saranno

$$x_i = 0\,,\ x_k = 0\quad x_l = y_l\,,\ x_m = -y_m$$

Ne risulta: I sei punti $P'_{12}, P'_{23}, P'_{31}, P'_{14}, P'_{24}, P'_{34}$ sono situati sul piano

$$(29)\quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} + \frac{x_4}{y_4} = 0\,;$$

questo diciamo il piano polare di P rispetto al tetraedro fondamentale.

Diciamo ora ε il piano polare del punto unità; il piano ε avrà, per la (29) l'equazione

$$\varepsilon)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

e sia π il piano di equazione (28)

$$\pi)\quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

Calcoliamo il birapporto dei quattro punti che p. e. sullo spigolo

$$\alpha_3 \alpha_4 \equiv A_1 A_2$$

del tetraedro determinano i quattro piani

$$\alpha_1\ \alpha_2\ ,\ \varepsilon\ ,\ \pi\ ,$$

birapporto che indichiamo con

$$\alpha_3\, \alpha_4 (\alpha_1 \alpha_2\ \varepsilon\ \pi).$$

Questo è il birapporto dei quattro punti

$$A_2\ ,\ A_1\ ,\ E'_{12}\ ,\ P_{12}$$

sulla retta $A_1 A_2$ ove con E'_{12}, P_{12} indichiamo i punti ove il piano ε, π incontrano rispettivamente lo spigolo $A_1 A_2$; ciascuno di questi quattro punti ha $x_3 = x_4 = 0$ e il loro birapporto è dunque uguale a quello dei quattro corrispondenti valori di $\frac{x_1}{x_2}$. Ora si ha

$$\frac{x_1}{x_2} = 0 \text{ in } A_2\ ,\quad \frac{x_1}{x_2} = \infty \text{ in } A_1$$

e dalle equazioni di ε, π risulta

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 \text{ in } E'_{12}\ ,\quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{\xi_2}{\xi_1} \text{ in } P_{12}\ ,$$

onde

$$\alpha_3\, \alpha_4 (\alpha_1\, \alpha_2\ \varepsilon\ \pi) = \left(0, \infty; -1; -\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

In generale avremo

$$(89) \qquad \alpha_i\, \alpha_k (\alpha_l\, \alpha_m\ \varepsilon\ \pi) = \frac{\xi_l}{\xi_m}\ ,$$

onde, confrontando questa formola colla (22), vediamo appunto che $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ hanno pel piano π il significato duale di x_1, x_2, x_3, x_4 pel punto P, c. d. d.

Così adunque l'equazione

$$(28) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

può ricevere una doppia interpretazione geometrica o come equazione del piano (ξ) in coordinate x di punti ove si pensino fisse le ξ e variabili le x; ovvero come equazioni del punto (x) in coordinate ξ di piani pensando fisse le x e variabili le ξ. Da questa doppia interpretazione della (28) scaturisce la dimostrazione analitica del principio di dualità nello spazio (cf. § 85).

§ 92.

Trasformazione delle coordinate ed equazioni delle superficie

La ricerca delle formole per la trasformazione delle coordinate projettive omogenee nello spazio procede in modo così strettamente analogo a quello svolto al § 83 pel piano che sarebbe inutile insistervi, bastando solo aumentare da 3 a 4 il numero delle variabili. Così troviamo che, dette $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ le antiche coordinate di un punto ed $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$

le nuove, si esprimono le y per le x mediante la sostituzione lineare omogenea

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

o brevemente

$$\text{(VII)} \qquad y_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik}\, x_k \quad (i=1,2,3,4),$$

dove le a_{ik} sono coefficienti costanti il cui determinante (modulo della sostituzione) è diverso da zero. Le formole inverse delle (VII) si scrivono

$$\text{(VII*)} \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=4} A_{ki}\, y_k$$

Nello stesso tempo, indicando con ξ_i le antiche con η_i le nuove coordinate di un piano, avremo

$$\text{(VIII)} \qquad \xi_i = \sum_{k}^{1-k} a_{ki}\, \eta_k \quad (i=1,2,3,4)$$

e le inverse

$$\text{(VIII*)} \qquad \eta_i = \sum_{k}^{1-k} A_{ik}\, \xi_k \quad (i=1,2,3,4).$$

Passando ora a trattare delle equazioni delle superficie (in coordinate di punti), vediamo che se un punto $P \equiv (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ percorre una superficie

determinata i tre rapporti

$$\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}$$

rimarranno certamente legati da una relazione

$$f\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4}\right)=0,$$

l'equazione della superficie. Se la superficie è algebrica la f si può ridurre razionale ed intera di un certo grado m e moltiplicando l'equazione per x_4^m essa assume la forma

(31) $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0,$

dove Φ è una funzione razionale, intera ed omogenea di grado m in x_1, x_2, x_3, x_4 cioè *una forma quaternaria di grado m*.

A causa della linearità delle equazioni di trasformazione *il grado di una superficie non muta cangiando coordinate*.

Se si taglia una superficie di grado m con un piano arbitrario π dello spazio p.le col piano $x_4=0$ (che possiamo trasportare in π), vediamo che la sezione è una curva algebrica di grado m, supposto che la (31) non sia identicamente soddisfatta da $x_4=0$, cioè che la Φ non contenga x_4 come fattore. Dunque:

B) *Una superficie algebrica di grado m è segata*

da un piano arbitrario dello spazio (che non faccia parte della superficie) in una curva algebrica di grado m.

Segue di qui e dal teorema A), § 84 (ovvero si può dedurre direttamente) l'altro teorema:

C) Una retta arbitraria dello spazio, che non giaccia sulla superficie, la incontra in m punti fra reali ed immaginari, distinti o coincidenti.

— Parte seconda —

Le curve di 2° grado

— Capitolo 9° —

Proprietà generali projettive delle curve di 2° grado. Teoria della polarità.

§ 93

Forme quadratiche in n variabili

Dopo avere esposto nei precedenti otto capitoli le nozioni fondamentali sul metodo delle coordinate, e le loro applicazioni alle linee e superficie di 1° grado, noi andiamo ora a intraprendere lo studio delle curve e delle superficie di 2° grado. Questo studio formerà l'oggetto della seconda e della terza parte del corso.

Ci occuperemo particolarmente delle proprietà metriche e ci serviremo quindi quasi sempre di coordinate metriche (le cartesiane). Però in una prima parte generale, ove studieremo tanto per le

350

dell

a termine. Converremo

con a_{ik}, servendoci di

indici, k, corrispondenti

figurano nel termine.

$x_k \, x_i$

re

x_k

scriverà

(1)

si debbono sommare

far percorrere ad i,

ssibili, con ripetizione,

ementari delle somme

x_k),

esso si ha:

$^2 +$

$+ 2a_{n-1,n} \, x_{n-1} \, x_n$

convi quanto poi per le superficie (di 2° grado) le proprietà generali projettive, dalle quali le metriche discendono come caso particolare, sarà opportuno valersi, come faremo, di coordinate generali projettive (omogenee).

L'equazione di una curva o di una superficie di 2° grado, in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, ovvero x_1, x_2, x_3, x_4, si ottiene (§§ 84.92) eguagliando a zero una forma di 2° grado nelle 3 o nelle quattro variabili, o brevemente una forma quadratica ternaria o quaternaria. Alcune proprietà fondamentali dipendono da proprietà generali delle forme quadratiche, in un numero qualunque n di variabili indipendenti

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

e noi cominceremo qui dall'esporre quei pochi teoremi generali su tali forme che dovremo poi applicare nel caso ternario o quaternario, cioè alle curve ed alle superficie di 2° grado.

Una forma quadratica f nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ è una somma di termini della forma

$$\Sigma A\, x_i\, x_k,$$

dove gli indici i, k prendano tutti i valori, differenti ed uguali, da 1 a n ed A indica un coef-

ficiente variabile da termine a termine. Converremo d'indicare questo coefficiente con a_{ik}, servendoci di una sola lettera affetta da due indici, k, corrispondenti agli indici delle variabili che figurano nel termine. E siccome i due termini

$$a_{ik}\, x_i\, x_k\ ,\quad a_{ki}\, x_k\, x_i$$

si sommano nell'unico termine

$$(a_{ik} + a_{ki})\, x_i\, x_k$$

converremo di assumere

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Così la formola f si scriverà

$$(1)\qquad f = \sum_{i,k}^{1..n} a_{ik}\, x_i\, x_k,\ ^{(1)}$$

dove il simbolo $\sum_{i,k}^{1..n}$ indica che si debbono sommare tutti i termini ottenuti col far percorrere ad i, k tutte le combinazioni possibili, con ripetizione, degli indici da 1 ad n.

Per le proprietà elementari delle somme la (1) può scriversi anche:

$$f = \sum_i^{1..n} x_i \left(\sum_k^{1..n} a_{ik}\, x_k\right),$$

---

(1) Se si scrive la (1) per disteso si ha:

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 +$$
$$+ 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + \cdots + 2 a_{n-1,n}\, x_{n-1}\, x_n.$$

$P'P''P'''$ ed a punto unità il punto $(x_i' + x_i'' + x_i''')$

Ed ora dalle (27) segue subito che le coordinate del punto P mobile sul piano $P'P''P'''$ soddisfano l'equazione lineare omogenea nelle coordinate correnti

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0 .$$

Viceversa ogni tale equazione lineare omogenea

(28) $$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

rappresenta un piano.

§ 91.

Coordinate nello spazio di piani

Partendo dall'ultimo risultato conseguito, cerchiamo il significato geometrico dei coefficienti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ nell'equazione (28) di un piano π. Seguendo la via tracciata dalle analoghe ricerche per l'equazione della retta nel piano (§ 81) vedremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ hanno, rispetto al piano π, un significato perfettamente duale delle coordinate $x_1 x_2 x_3 x_4$ di un punto; per ciò diremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ sono le coordina-

te del piano π ed avremo il resultato finale: Le coordinate di un piano sono i coefficienti della sua equazione in coordinate di punti

Cominciamo dal dimostrare il lemma seguente. Da ogni spigolo $A_i A_k$ del tetraedro fondamentale projettiamo un punto qualunque $P\equiv(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ sullo spigolo opposto $A_l A_m$ e diciamo P_{lm} la sua projezione; le coordinate di P_{lm} sono (§ 89)

$$x_i = 0,\; x_k = 0\;,\; x_l = y_l\;,\; x_m = y_m .$$

Indichiamo con P'_{lm} il coniugato armonico di P_{lm} rispetto ad A_l, A_m; le coordinate di P'_{lm} saranno

$$x_i = 0\;,\; x_k = 0 \quad x_l = y_l\;,\; x_m = -y_m$$

Ne risulta: I sei punti $P'_{12}, P'_{23}, P'_{31}, P'_{14}, P'_{24}, P'_{34}$ sono situati sul piano

$$(29)\quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} + \frac{x_4}{y_4} = 0;$$

questo diciamo il piano polare di P rispetto al tetraedro fondamentale

Diciamo ora ε il piano polare del punto unità; il piano ε avrà, per la (29) l'equazione

$$\varepsilon)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

e sia π il piano di equazione (28).

$$\pi)\quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

Calcoliamo il birapporto dei quattro punti che p. e. sullo spigolo

$$\alpha_3, \alpha_4 \equiv A_1 A_2$$

del tetraedro determinano i quattro piani

$$\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon, \pi,$$

birapporto che indichiamo con

$$\alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon \pi).$$

Questo è il birapporto dei quattro punti

$$A_2, A_1, E'_{12}, P_{12}$$

sulla retta $A_1 A_2$ ove con E'_{12}, P_{12} indichiamo i punti ove il piano ε, π incontrano rispettivamente lo spigolo $A_1 A_2$; ciascuno di questi quattro punti ha $x_3 = x_4 = 0$ e il loro birapporto è dunque uguale a quello dei quattro corrispondenti valori di $\frac{x_1}{x_2}$. Ora si ha

$$\frac{x_1}{x_2} = 0 \text{ in } A_2 \quad , \quad \frac{x_1}{x_2} = \infty \text{ in } A_1$$

e dalle equazioni di ε, π risulta

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 \text{ in } E'_{12} \quad , \quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{\xi_2}{\xi_1} \text{ in } P_{12},$$

onde

$$\alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 \alpha_2 \varepsilon \pi) = \left(0, \infty; -1; -\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

In generale avremo

$$(39) \qquad \alpha_i \alpha_k (\alpha_l \alpha_m \varepsilon \pi) = \frac{\xi_l}{\xi_m},$$

onde, confrontando questa formola colla (22), vediamo appunto che $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ hanno pel piano π il significato duale di x_1, x_2, x_3, x_4 pel punto P, c. d. d.

Così adunque l'equazione

$$(28) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

può ricevere una doppia interpretazione geometrica o come equazione del piano (ξ) in coordinate x di punti ove si pensino fisse le ξ e variabili le x; ovvero come equazioni del punto (x) in coordinate ξ di piani pensando fisse le x e variabili le ξ. Da questa doppia interpretazione della (28) scaturisce la dimostrazione analitica del principio di dualità nello spazio (cf. § 85).

§ 92.

Trasformazione delle coordinate ed equazioni delle superficie

La ricerca delle formole per la trasformazione delle coordinate projettive omogenee nello spazio procede in modo così strettamente analogo a quello svolto al § 83 pel piano che sarebbe inutile insistervi, bastando solo aumentare da 3 a 4 il numero delle variabili. Così troviamo che, dette x_1 x_2 x_3 x_4 le antiche coordinate di un punto ed y_1 y_2 y_3 y_4

indichiamo con

$$\begin{cases} \lambda_1 = A_1 A_4 (A_2 A_3 E P) & , \quad \mu_1 = A_2 A_3 (A_1 A_4 E P) \\ \lambda_2 = A_2 A_4 (A_3 A_1 E P) & , \quad \mu_2 = A_3 A_1 (A_2 A_4 E P) \\ \lambda_3 = A_3 A_4 (A_1 A_2 E P) & , \quad \mu_3 = A_1 A_2 (A_3 A_4 E P). \end{cases}$$

Naturalmente bastano già tre di questi numeri, p. e. μ_1, μ_2, μ_3, per fissare la posizione di P nello spazio, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ saranno funzioni di μ_1, μ_2, μ_3 che si tratta in primo luogo di calcolare. Perciò indichiamo con B_1, B_2, B_3, B_4 i punti ove la congiungente di E con P incontra le facce $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ del tetraedro. Troviamo subito:

$$\lambda_1 = (B_3 B_2 E P) \quad , \quad \mu_1 = (B_4 B_1 E P)$$
$$\lambda_2 = (B_1 B_3 E P) \quad , \quad \mu_2 = (B_4 B_3 E P)$$
$$\lambda_3 = (B_2 B_1 E P) \quad , \quad \mu_3 = (B_4 B_3 E P);$$

ora si ha (§ 71, (1))

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} = \frac{(E P B_4 B_2)}{(E P B_2 B_3)} = (E P B_3 B_2) = (B_3 B_2 E P)$$

e perciò $\lambda_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_3}$, e analogamente

$$\lambda_2 = \frac{\mu_3}{\mu_1}, \quad \lambda_3 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Se prendiamo quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4, determinati solo a meno di un fattore comune di proporzionalità, tali che si abbia

$$\mu_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad \mu_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad \mu_3 = \frac{x_3}{x_4},$$

ne seguirà

$$\lambda_1 = \frac{x_2}{x_3}, \quad \lambda_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \lambda_3 = \frac{x_1}{x_2}.$$

Badando al significato del birapporto λ, μ si vede che indicando con i, k, l, m una permutazione qualunque dei quattro indici 1, 2, 3, 4 si avrà in generale

$$(22) \qquad A_i A_k (A_l A_m E P) = \frac{x_l}{x_m}.$$

I quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4, che coi loro rapporti individuano la posizione del punto P nello spazio, si diranno le coordinate projettive omogenee del punto P.

Si osservi che se un punto P è situato sopra una faccia del tetraedro, p. e. la α_4 sarà corrispondentemente $x_4 = 0$ ed x_1, x_2, x_3 saranno, nel piano α_4, le coordinate projettive omogenee di P, preso $A_1 A_2 A_3$ come triangolo fondamentale ed il punto E_4, projezione di E del piano α_4 dal centro A_4, per punto unità; analogamente dicasi per le altre faccie. Un punto situato sopra uno spigolo $A_i A_k$ del tetraedro avrà zero le altre due coordinate $x_l\ x_m$ e le x_i, x_k saranno le

coordinate projettive omogenee di P sulla punteggiata $A_i A_k$ presi i punti A_i, A_k per punti fondamentali e per punto unità il punto E_{ik} projezione di E sullo spigolo $A_i A_k$ fatta dallo spigolo opposto $A_l A_m$.

Si osservi in particolare che i punti fondamentali ed il punto E hanno le coordinate seguenti

$$A_1 \equiv (1, 0, 0, 0), \quad A_2 \equiv (0, 1, 0, 0), \quad A_3 \equiv (0, 0, 1, 0), \quad A_4 \equiv (0, 0, 0, 1)$$

$$E \equiv (1, 1, 1, 1)$$

<u>Osservazione</u>. Vediamo anche quì come le coordinate cartesiane ordinarie possano considerarsi come un caso particolare delle projettive (cf. §78). Essendo $O(x, y, z)$ un sistema cartesiano, consideriamo un sistema di coordinate projettive in cui il vertice A_4 cada in O i vertici A_1, A_2, A_3 ordinatamente nei punti all'infinito degli assi Ox, Oy, Oz rispettivamente ed in fine prendiamo per punto unità E quello colle coordinate cartesiane $(1, 1, 1)$; allora si vedrà subito che si ha

$$(23) \qquad x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Come per il piano, le particolari coordinate projettive omogenee corrispondenti a queste formole (23) si diranno le coordinate car-

tesiane omogenee.

§ 90.

Equazione del piano e punteggiate nello spazio

Consideriamo dapprima un piano π che passi p. e. pel vertice A_4 del tetraedro fondamentale; esso interseca la faccia α_4 in una retta che se questo piano avrà un'equazione della forma

$$(24) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Un punto qualunque P di π si projetta da A_4 su α_4 in un punto P_4 che ha le stesse tre prime coordinate di P; dunque le coordinate di un punto qualunque di π soddisfano la (24). Viceversa un punto qualunque le cui coordinate soddisfano la (24) si projetta da A_4 su α_4 in un punto P_4 che giace sulla retta (24); per ciò P è su π. Dunque la (24) è nello spazio l'equazione del piano π.

In generale un piano che passi pel vertice A_i ha un'equazione lineare omogenea in cui manca il termine colla x_i.

Prendiamo ora una retta arbitraria r nello spazio e projettiamola dai quattro punti

fondamentali; due almeno di questi piani sono distinti e possono essere presi per individuare la retta. Da quanto si è dimostrato ora segue dunque: *Una retta qualsiasi dello spazio è rappresentata dal sistema di due equazioni lineari omogenee nelle coordinate.*

Risolvendo queste due equazioni rispetto a due delle variabili, potremo dare alle equazioni della retta, p. e. la forma

$$(25) \qquad \begin{cases} x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2 . \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ costanti})$$

Supponiamo che siano $(x_1' \, x_2' \, x_3' \, x_4')$, $(x_1'' \, x_2'' \, x_3'' \, x_4'')$, o come scriveremo più brevemente $P' \equiv (x_i')$, $P'' \equiv (x_i'')$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, due punti distinti della retta; sarà necessariamente $\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \neq 0$, altrimenti per la (25) sarebbero zero tutti i minori di 2° ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{Vmatrix}$$

ed i punti $P' P''$ coinciderebbero. Ciò posto, essendo $P \equiv (x_i)$ un punto qualunque della retta, potremo determinare i moltiplicatori λ, μ in guisa che risulti

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$$
$$x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$$

e allora risulterà dalle (25)

$$x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3 \,,\quad x_4 = \lambda x'_4 + \mu x''_4 \,.$$

Ne deduciamo adunque: Se $P' \equiv (x'_i)$, $P'' \equiv (x''_i)$ sono due punti distinti ogni punto $P \equiv (x_i)$ allineato con P', P'' ha coordinate della forma

$$(26) \qquad x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Precisamente come al § 80 vediamo che: in queste formole (26) i parametri λ, μ sono le coordinate omogenee projettive del punto P sulla punteggiata $P'P''$, presi P', P'' a punti fondamentali e per punto unità

$$E' \equiv (x'_1 + x''_1 ,\ x'_2 + x''_2 ,\ x'_3 + x''_3 ,\ x'_4 + x''_4).$$

Siano ora $P' \equiv (x'_i)$, $P'' \equiv (x''_i)$, $P''' \equiv (x'''_i)$ tre punti dello spazio non allineati. Essi individuano un piano $P'P''P'''$ ed ogni punto P di questo piano è allineato con $P''' \equiv (x'''_i)$ e con un punto $(\lambda x'_i + \mu x''_i)$ della retta $P'P''$. Dunque pel resultato precedente abbiamo:

Le coordinate x_i di ogni punto P del piano $P'P''P'''$ sono date dalle formole

$$(27) \qquad x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i + \nu x'''_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

con λ, μ, ν parametri arbitrarî.

Facilmente si vede inoltre che λ, μ, ν sono le coordinate projettive omogenee di P sul piano $P'P''P'''$ ove si prenda a triangolo fondamentale

$P'P''P'''$ ed a punto unità il punto $(x_i' + x_i'' + x_i''')$

Ed ora dalle (27) segue subito che le coordinate del punto P mobile sul piano $P'P''P'''$ soddisfano l'equazione lineare omogenea nelle coordinate correnti

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Viceversa ogni tale equazione lineare omogenea

(28) $$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

rappresenta un piano.

§ 91.

Coordinate nello spazio di piani

Partendo dall'ultimo risultato conseguito, cerchiamo il significato geometrico dei coefficienti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ nell'equazione (28) di un piano π. Seguendo la via tracciata dalle analoghe ricerche per l'equazione della retta nel piano (§ 81) vedremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ hanno, rispetto al piano π, un significato perfettamente duale delle coordinate $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ di un punto; per ciò diremo che $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ sono <u>le coordina-</u>

te del piano π ed avremo il resultato finale: Le coordinate di un piano sono i coefficienti della sua equazione in coordinate di punti.

Cominciamo dal dimostrare il lemma seguente. Da ogni spigolo $A_i A_k$ del tetraedro fondamentale proiettiamo un punto qualunque $P \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$ sullo spigolo opposto $A_l A_m$ e diciamo P_{lm} la sua proiezione; le coordinate di P_{lm} sono (§ 89)

$$x_i = 0, \; x_k = 0, \quad x_l = y_l, \; x_m = y_m.$$

Indichiamo con P'_{lm} il coniugato armonico di P_{lm} rispetto ad A_l, A_m; le coordinate di P'_{lm} saranno

$$x_i = 0, \; x_k = 0 \quad x_l = y_l, \; x_m = -y_m$$

Ne risulta: I sei punti $P'_{12}, P'_{23}, P'_{31}, P'_{14}, P'_{24}, P'_{34}$ sono situati sul piano

$$(29) \quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} + \frac{x_4}{y_4} = 0;$$

questo diciamo il piano polare di P rispetto al tetraedro fondamentale.

Diciamo ora ε il piano polare del punto unità; il piano ε avrà, per la (29) l'equazione

$$\varepsilon) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

e sia π il piano di equazione (28).

$$\pi) \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

Calcoliamo il birapporto dei quattro punti che p. e. sullo spigolo

$$\alpha_3, \alpha_4 \equiv A_1 A_2$$

del tetraedro determinano i quattro piani

$$\alpha_1\, \alpha_2\, , \varepsilon\, , \pi\, ,$$

birapporto che indichiamo con

$$\alpha_3\, \alpha_4 (\alpha_1 \alpha_2\, \varepsilon\, \pi).$$

Questo è il birapporto dei quattro punti

$$A_2\, , A_1\, , E'_{12}\, , P_{12}$$

sulla retta $A_1 A_2$ ove con E'_{12}, P_{12} indichiamo i punti ove il piano ε, π incontrano rispettivamente lo spigolo $A_1 A_2$; ciascuno di questi quattro punti ha $x_3 = x_4 = 0$ e il loro birapporto è dunque uguale a quello dei quattro corrispondenti valori di $\frac{x_1}{x_2}$. Ora si ha

$$\frac{x_1}{x_2} = 0 \text{ in } A_2 \quad , \quad \frac{x_1}{x_2} = \infty \text{ in } A_1$$

e dalle equazioni di ε, π risulta

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 \text{ in } E'_{12} \quad , \quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{\xi_2}{\xi_1} \text{ in } P_{12}\, ,$$

onde

$$\alpha_3\, \alpha_4 (\alpha_1\, \alpha_2\, \varepsilon\, \pi) = \left(0, \infty; -1; -\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

In generale avremo

$$(89) \qquad \alpha_i\, \alpha_k\, (\alpha_l\, \alpha_m\, \varepsilon\, \pi) = \frac{\xi_l}{\xi_m}\, ,$$

onde, confrontando questa formola colla (22), vediamo appunto che $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ hanno pel piano π il significato duale di x_1, x_2, x_3, x_4 pel punto P, c. d. d.

Così adunque l'equazione

$$(28) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

può ricevere una doppia interpretazione geometrica o come equazione del piano (ξ) in coordinate x di punti ove si pensino fisse le ξ e variabili le x; ovvero come equazioni del punto (x) in coordinate ξ di piani pensando fisse le x e variabili le ξ. Da questa doppia interpretazione della (28) scaturisce la dimostrazione analitica del principio di dualità nello spazio (cf. §85).

§92.

Trasformazione delle coordinate ed equazioni delle superficie

La ricerca delle formole per la trasformazione delle coordinate projettive omogenee nello spazio procede in modo così strettamente analogo a quello svolto al §83 pel piano che sarebbe inutile insistervi, bastando solo aumentare da 3 a 4 il numero delle variabili. Così troviamo che, dette x_1, x_2, x_3, x_4 le antiche coordinate di un punto ed y_1, y_2, y_3, y_4

le nuove, si esprimono le y per le x mediante la sostituzione lineare omogenea

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

o brevemente

$$(\text{VII}) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik}\, x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove le a_{ik} sono coefficienti costanti il cui determinante (modulo della sostituzione) è diverso da zero. Le formole inverse delle (VII) si scrivano

$$(\text{VII}^*) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=4} A_{ki}\, y_k$$

Nello stesso tempo, indicando con ξ_i le antiche con η_i le nuove coordinate di un piano, avremo

$$(\text{VIII}) \qquad \xi_i = \sum_{k}^{1\cdot k} a_{ki}\, \eta_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e le inverse

$$(\text{VIII}^*) \qquad \eta_i = \sum_{k}^{1-k} A_{ik}\, \xi_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Passando ora a trattare delle equazioni delle superficie (in coordinate di punti), vediamo che se un punto $P \equiv (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ percorre una superficie

determinata i tre rapporti

$$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$$

rimovranno costantemente legati da una relazione

$$f\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = 0,$$

l'equazione della superficie. Se la superficie è algebrica la f si può ridurre razionale ed intera di un certo grado m e moltiplicando l'equazione per x_4^m essa assume la forma

(31) $\quad \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$

dove Φ è una funzione razionale, intera ed omogenea di grado m in x_1, x_2, x_3, x_4 cioè una forma quaternaria di grado m.

A causa della linearità delle equazioni di trasformazione il grado di una superficie non muta cangiando coordinate.

Se si taglia una superficie di grado m con un piano arbitrario π dello spazio p. e. col piano $x_4 = 0$ (che possiamo trasportare in π), vediamo che la sezione è una curva algebrica di grado m, supposto che la (31) non sia identicamente soddisfatta da $x_4 = 0$, cioè che la Φ non contenga x_4 come fattore. Dunque:

B) Una superficie algebrica di grado m è segata

da un piano arbitrario dello spazio (che non faccia parte della superficie) in una curva algebrica di grado m.

Segue di qui e dal teorema A), § 84 (ovvero si può dedurre direttamente) l'altro teorema:

C) Una retta arbitraria dello spazio, che non giaccia sulla superficie, la incontra in m punti fra reali ed immaginari, distinti o coincidenti.

— Parte seconda —

Le curve di 2° grado

— Capitolo 9° —

Proprietà generali projettive delle curve di 2° grado. Teoria della polarità.

§ 93.

Forme quadratiche in n variabili

Dopo avere esposto nei precedenti otto capitoli le nozioni fondamentali sul metodo delle coordinate, e le loro applicazioni alle linee e superficie di 1° grado, noi andiamo ora a intraprendere lo studio delle curve e delle superficie di 2° grado. Questo studio formerà l'oggetto della seconda e della terza parte del corso.

Ci occuperemo particolarmente delle proprietà metriche e ci serviremo quindi quasi sempre di coordinate metriche (le cartesiane). Però in una prima parte generale, ove studieremo tanto per le

scuore quanto poi per le superficie (di 2° grado) le proprietà generali projettive, dalle quali le metriche discendono come caso particolare, sarà opportuno valersi, come faremo, di coordinate generali projettive (omogenee)

L'equazione di una curva o di una superficie di 2° grado, in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, ovvero x_1, x_2, x_3, x_4, si ottiene (§§ 84. 92) eguagliando a zero una forma di 2° grado nelle 3 o nelle quattro variabili, o brevemente una forma quadratica ternaria o quaternaria. Alcune proprietà fondamentali dipendono da proprietà generali delle forme quadratiche, in un numero qualunque n di variabili indipendenti

$$x_1, x_2, \ldots . x_n,$$

e noi comincieremo qui dall'esporre quei pochi teoremi generali su tali forme che dovremo poi applicare nel caso ternario o quaternario, cioè alle curve ed alle superficie di 2° grado.

Una forma quadratica f nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots . x_n$ è una somma di termini della forma

$$\Sigma A x_i x_k,$$

dove gli indici i, k prendono tutti i valori, differenti ed uguali, da 1 a n ed A indica un coef-

ficiente variabile da termine a termine. Converremo d'indicare questo coefficiente con a_{ik}, servendoci di una sola lettera affetta da due indici, k, corrispondenti agli indici delle variabili che figurano nel termine. Siccome i due termini

$$a_{ik}\, x_i\, x_k \,, \quad a_{ki}\, x_k\, x_i$$

si sommano nell'unico termine

$$(a_{ik} + a_{ki})\, x_i\, x_k$$

converremo di assumere

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Così la formola f si scriverà

$$(1) \qquad f = \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, x_i\, x_k \,,^{(1)}$$

dove il simbolo $\sum_{i,k}^{1\dots n}$ indica che si debbono sommare tutti i termini ottenuti col far percorrere ad i, k tutte le combinazioni possibili, con ripetizione, degli indici da 1 ad n.

Per le proprietà elementari delle somme la (1) può scriversi anche:

$$f = \sum_{i}^{1\dots n} x_i \left(\sum_{k}^{1\dots n} a_{ik}\, x_k \right),$$

---

(1) Se si scrive la (1) per disteso si ha:

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 +$$
$$+ 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + \cdots + 2 a_{n-1,n}\, x_{n-1}\, x_n$$

ossia scrivendo per disteso

$$(2). \quad f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n) +$$
$$+ x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n) +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n).$$

Gli n polinomî lineari che in questa formola abbiamo scritto fra parentesi sono le <u>semiderivate parziali</u> della funzione f rapporto ad $x_1, x_2, \ldots x_n$ rispettivamente e si indicano, come è noto, coi simboli

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dx_1}, \; \frac{1}{2}\frac{df}{dx_2}, \cdots\cdots \frac{1}{2}\frac{df}{dx_n},$$

onde l'identità (2) che spesso dovremo invocare nel seguito, assume la forma:

$$(2^*) \quad 2f = x_1\frac{df}{dx_1} + x_2\frac{df}{dx_2} + \cdots + x_n\frac{df}{dx_n}.$$

Sotto questa forma non è che un caso particolare di una formola generale d'Eulero relativa alle funzioni omogenee (di qualunque specie).

§ 94.

Il discriminante come invariante

Chiamasi discriminante della forma f

quadratica (1) il determinante (simmetrico) Δ dei coefficienti a_{ik}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

che talora indicheremo anche, per brevità, con

$$\Delta = |a_{ik}|.$$

Cangiamo le n variabili (indipendenti) $x_1, x_2 \ldots x_n$ in nuove n variabili $y_1, y_2 \ldots y_n$ mediante una sostituzione lineare omogenea

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n, \end{cases}$$

dove i coefficienti c_{ik} sono costanti qualunque (senza che sia necessariamente $c_{ik} = c_{ki}$) soggette alla sola condizione che il loro determinante

$$C = |c_{ik}|,$$

o modulo della sostituzione lineare sia diverso da zero (1). Più brevemente possiamo denotare

(1) Questa condizione è necessaria perchè altrimenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ dovrebbero essere legate almeno da una relazione lineare omogenea, mentre sono

la sostituzione (3) colla sola formola

$$(3^*) \qquad x_i = \sum_k^{1..n} c_{ik}\, y_k \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Operando entro la forma f la sostituzione (3) o (3*), la f si cangerà chiaramente in una nuova forma quadratica nelle y, che indicheremo con

$$(4) \qquad f' = \sum_{i,k}^{1..n} a'_{ik}\, y_i\, y_k\,,$$

denotando con a'_{ik} i nuovi coefficienti.

Fra il discriminante Δ della forma primitiva f ed il discriminante Δ' della trasformata f' sussiste, come andiamo a dimostrare, l'importante relazione

$$(I) \qquad \Delta' = \Delta . C^2$$

in parole: <u>Il discriminante della forma trasformata è eguale al prodotto del discriminante della primitiva pel quadrato del modulo della sostituzione</u>.

Diciamo di passaggio che per una forma di qualunque grado[(1)] prendono il nome di <u>invarianti</u> quelle funzioni razionali dei coefficienti, che per una sostituzione lineare a modulo

---

supposte invece indipendenti.

C, eseguita sulle variabili della forma, si alterano soltanto per un fattore eguale ad una potenza del modulo C. Secondo il teorema enunciato, il discriminante di una forma quadratica è adunque un invariante.

Per dimostrare questo teorema basterà calcolare i coefficienti a'_{ik} in funzione degli antichi a_{ik} dei coefficienti c_{ik} della sostituzione.

Essendo

$$f = \sum_{r,s}^{1..n} a_{rs}\, x_r\, x_s\,,$$

colla sostituzione effettiva (3*) ponendo in f rispettivamente per x_r, x_s

$$x_r = \sum_i^{1..n} c_{ri}\, y_i\,, \quad x_s = \sum_k^{1..n} c_{sk}\, y_k$$

otteniamo

$$f' = \sum_{r,s}^{1..n} a_{rs} \Big(\sum_i^{1..n} c_{ri}\, y_i\Big)\cdot\Big(\sum_k^{1..n} c_{sk}\, y_k\Big),$$

che, servendosi delle proprietà elementari delle somme, si può scrivere

$$f' = \sum_{i,k}^{1..n} \Big(\sum_{r,s}^{1..n} a_{rs}\, c_{ri}\, c_{sk}\Big)\cdot y_i\, y_k\,.$$

Paragonando colla (4), abbiamo dunque per le formole richieste:

$$a'_{ik} = \sum_{r,s}^{1..n} a_{rs}\, c_{ri}\, c_{sk}\,,$$

che possiamo anche scrivere

$$(5)\qquad a'_{ik}=\sum_r^{1\ldots n}\sum_s^{1\ldots n}(a_{rs}\,c_{sk})\,c_{ri}\quad(i,k=1,2,\ldots n).$$

La somma $\sum_s^{1\ldots n} a_{rs}\,c_{sk}$ ha un valore dipendente solo dagli indici r,k; se poniamo

$$(6)\qquad b_{rk}=\sum_s^{1\ldots n} a_{rs}\,c_{sk},$$

la (5) si scriverà

$$(5^*)\qquad a'_{ik}=\sum_r^{1\ldots n} b_{rk}\,c_{ri}.$$

Dopo ciò, applicando due volte il teorema di moltiplicazione dei determinanti, dimostriamo la formula (I). E infatti, indicando con B il determinante delle b, se moltiplichiamo fra loro i due determinanti

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{vmatrix},\qquad C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}$$

colonna per colonna, osservando la (5*) ne deduciamo appunto

$$|a'_{ik}|=|b_{ik}|\times|c_{ik}|$$

ossia

$$(7)\qquad \Delta'=B.C.$$

Se moltiplichiamo poi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{per} \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ c_{n1} \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

linea per colonna osservando la (6), abbiamo

$$B = \Delta C,$$

onde sostituendo nella (7) si ha appunto

$$\Delta' = \Delta C^2,$$

cioè la formola (I)

Dalle formole (5) vogliamo trarre ancora un'altra conseguenza. Moltiplicando la (5) per y_k e sommando rispetto a k abbiamo

$$\sum_k a'_{ik} y_k = \sum_{r,s} a_{rs} c_{ri} \left(\sum_k c_{sk} y_k \right)$$

ossia per la (3*)

$$\sum_k a'_{ik} y_k = \sum_r c_{ri} \left(\sum_s a_{rs} x_s \right),$$

che si scrive

$$\frac{df'}{dy_i} = \sum_r c_{ri} \frac{df}{dx_r};$$

dunque: <u>Se la f si trasforma nella f' per una sostituzione lineare le derivate parziali della f' rispetto alle nuove variabili sono espressioni lineari ed omogenee delle derivate parziali della f rispetto alle antiche e viceversa.</u> (1)

(1) Ciò è anche una conseguenza delle leggi generali

§ 95.

Forme quadratiche riducibili

Una forma quadratica (1) con n variabili dicesi riducibile se, mediante una conveniente sostituzione lineare (3) sulle variabili, può ridursi a dipendere da un numero di variabili $< n$; quando ciò non è possibile la forma dicesi irriducibile.

Importa di stabilire un criterio per riconoscere, dai coefficienti dati a_{ik} di una forma quadratica, quale è il minimo numero di variabili a cui la forma è riducibile. A tal fine cominciamo dallo stabilire successivamente i termini seguenti:

a) Se il discriminante $\Delta = |a_{ik}|$ di una forma quadratica $f = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ è nullo, la forma è riducibile.

Consideriamo infatti le n equazioni lineari ed omogenee in n incognite $z_1, z_2 \ldots z_n$

$$\sum_s^{1\ldots n} a_{rs} z_s = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots n;$$

---

di derivazione che noi qui non supponiamo note.

essendo nullo Δ, potremo soddisfarvi con valori delle z non tutti nulli. Facciamo allora una sostituzione lineare (8) in cui i coefficienti $c_{1n}, c_{2n} \ldots c_{nn}$ dell'ultima colonna siano uguali rispettivamente a $z_1, z_2, \ldots z_n$, prendendo poi i coefficienti c delle altre colonne ad arbitrio, purchè naturalmente sia il determinante $C \neq 0$.(1)

Allora, a causa delle (6), sarà

$$b_{rn} = \sum_s a_{rs} c_{sn} = 0$$

indi per le (5*) $a'_{in} = 0$ per $i = 1, 2, \ldots n$, ciò che dimostra che la forma trasformata f' conterrà solo $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ c. d. d.

b) Eseguendo in una forma quadratica una sostituzione lineare sulle variabili, la caratteristica del suo discriminante non cangia.

Infatti, ritenendo le notazioni del § prec. e supposto che Δ sia di caratteristica m, saranno nulli tutti i minori d'ordine $m+1$ in Δ, quindi, a causa delle (6), anche tutti quelli d'ordine

---

(1) P. e. se $z_n \neq 0$ si potrà fare

$$x_1 = y_1 + z_1 y_n, \quad x_2 = y_2 + z_2 y_n \ldots \quad x_{n-1} = y_{n-1} + z_{n-1} y_n$$
$$x_n = y_n z_n,$$

con che $C = z_n$.

$m+1$ nel determinante B (1), indi per le (5*) saranno pur nulli gli analoghi minori di Δ'. Se m' è la caratteristica di Δ' è dunque $m' \leq m$. Ma siccome colla sostituzione inversa della (3) si trasforma f' in f, possiamo in questo risultato scambiare f con f' cioè m con m', e però $m \leq m'$; dunque $m' = m$, c. d. d.

c) Se una forma quadratica f con n variabili è riducibile ad una forma f' con $m < n$ variabili la caratteristica del suo discriminante non può superare m.

E infatti se f' contiene le sole variabili $y_1, y_2, \dots y_m$ e non $y_{m+1} \dots y_n$, nel discriminante Δ' di f' sono nulli tutti gli elementi delle ultime $n-m$ linee, e però tutti i minori d'ordine $m+1$. Dunque la caratteristica di Δ', ossia per b) quella di Δ, è al massimo $= m$.

Servendoci dei teoremi a), b), c) possiamo facilmente stabilire il criterio richiesto. Se m è la caratteristica di Δ ed è $m = n$, la forma è, pel teorema c), irriducibile. Quando

---

(1) Per le (4) ogni minore d'ordine $m+1$ in B è un aggregato di prodotti di minori d'ordine $m+1$ di Δ' per minori d'ordine $m+1$ di C.

sia $m < n$, potremo ridurre pel teorema a) la forma a contenere solo $n-1$ variabili, dopo di che se è ancora $m < n-1$ potremo fare una nuova riduzione e così via finchè il numero delle variabili è abbassato ad m. Pel teorema c) un'ulteriore riduzione è impossibile.

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema:

A) Il minimo numero di variabili a cui una forma quadratica data è riducibile eguaglia la caratteristica del suo discriminante.

Dobbiamo poi osservare che, per operare questa effettiva riduzione, basta applicare successivamente il processo indicato nella dimostrazione del teorema a), cioè risolvere dei sistemi lineari.

Dunque: La riduzione di una forma quadratica al minimo numero di variabili si effettua con operazioni razionali.

Osserviamo ancora che dal teorema A) discende il corollario: Condizione necessaria e sufficiente per la riducibilità di una forma quadratica è che sia nullo il suo discriminante.

Notevole è infine il caso in cui la caratteristica di Δ è $= 1$; allora la forma è riducibile ad una sola variabile, cioè è uguale al qua-

drato di una forma lineare, a meno di un coefficiente). Abbiamo dunque:

B) <u>Affinchè una forma quadratica sia il quadrato perfetto di una forma lineare è necessario e sufficiente che si annullino tutti i minori di 2° ordine nel suo discriminante.</u>

Ritorniamo al caso generale e supponiamo che, essendo Δ di caratteristica $m<n$, la forma f sia riducibile alla f' in sole m variabili $y_1, y_2, \dots y_m$. Queste sono linearmente esprimibili per le derivate parziali della f' rapporto a $y_1, y_2, \dots y_m$ e per l'osservazione alla fine del § prec. ne risulta quindi che $y_1, y_2, \dots y_m$ sono combinazioni lineari omogenee delle n forme lineari

$$\sum_k a_{ik}\, x_k \qquad i=1, 2 \dots n$$

(ossia delle semi derivate parziali della f) e fra queste, essendo Δ di caratteristica m, ve ne sono appunto m indipendenti. Dunque:

<u>Data la forma quadratica $\sum_{r,s} a_{rs}\, x_r x_s$ per ridurla al minimo numero m di variabili, basta introdurre come prime m variabili, il massimo numero di forme lineari indipendenti fra le n</u>

$$\underline{a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \dots + a_{in}\, x_n \quad (i=1, 2 \dots n)}$$

§ 96.
Coniche degeneri

L'equazione generale di una curva di 2° grado in coordinate omogenee (projettive) x_1, x_2, x_3 si scrive

(8) $f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$

I coefficienti a_{ik} possono essere reali od immaginari, ma d'ora innanzi li supporremo sempre reali. È subito da avvertire che, ciò non ostante, la curva può essere immaginaria, giacchè può benissimo avvenire che la forma f non si annulli per alcun sistema reale di valori delle variabili x_1, x_2, x_3 [1] che non siano tutti tre nulli, caso sempre escluso (§ 77).

Le curve di 2° grado si dicono sempre sezioni coniche o più brevemente coniche. Un cono circolare retto è in effetto una superficie di 2° grado (§ 49) e tutte le sue sezioni piane sono quindi curve di 2° grado. Che inversamente ogni curva reale di 2° grado possa considerarsi come una sezione piana del cono circolare retto si vedrà più tardi. Del resto anche il cono circolare obliquo è un cono di 2° grado

[1] Esempio: la forma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

e le sue sezioni piane sono quindi sempre curve di 2° grado).

Cominciamo dal considerare un caso in cui il luogo rappresentato dalla (8) è apparentemente una curva di 2° grado ma in realtà si scinde in due linee rette. Ciò avviene se la forma f si scinde nel prodotto di due forme lineari, se cioè

(9) $f = (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)(\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3)$

dove del resto i coefficienti α, β, γ; α', β', γ' delle due forme lineari possono essere reali od immaginarii. Allora infatti, perchè sia $f = 0$, deve essere o $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$, ovvero $\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 = 0$, per cui il luogo di 2° grado si scinde nelle due rette (reali od immaginarie) le cui equazioni separate sono quelle sopra scritte. Viceversa è da osservare che se di un luogo $f = 0$ di 2° grado fa parte una retta, la f si scinde in due fattori lineari di cui uno coincide col primo membro della equazione della retta, e la curva si scinde quindi in quella retta ed in una seconda retta. E invero se prendiamo la retta supposta per uno dei lati del triangolo fondamentale, p. e. pel lato $x_3 = 0$, dovrà annullarsi identicamente f quando $x_3 = 0$; perciò tutti i termini della f conterranno un fattore x_3, e sarà quindi

$$f = x_3 \cdot (a x_1 + b x_2 + c x_3),$$

ciò che dimostra l'assertol.

Quando la f è decomponibile in due fattori lineari, si dice perciò che la conica è <u>degenere</u> in una coppia di rette; e viceversa se la conica è degenere la f si spezza in due fattori lineari.

I risultati del § prec. ci conducono subito a trovare la condizione a cui debbono soddisfare i coefficienti a_{ik} dell'equazione (8) della conica affinchè questa sia degenere. E infatti se la f è decomponibile in due fattori lineari secondo la (9) la f è riducibile a 2 variabili se questi fattori sono distinti e ad una sola variabile se coincidono (a meno s'intende di un fattore costante).

Nel primo caso il discriminante Δ della f avrà la caratteristica 2, nel secondo la caratteristica 1; in ogni caso sarà $\Delta = 0$.

Inversamente se $\Delta = 0$ e la caratteristica di Δ è $= 1$ la f, pel teorema B) § prec., è il quadrato perfetto di una forma lineare.

Se poi la caratteristica di Δ è $= 2$, allora f è riducibile a due variabili, cioè

$$f = a y_1^2 + 2 b y_1 y_2 + c y_2^2.$$

Ora sussiste, come si deduce dall'algebra elementare, il teorema: <u>Ogni forma binaria quadratica è il prodotto di due fattori lineari (reali od im-</u>

maginario). E infatti se con α, β indichiamo le radici (reali od immaginarie) dell'equazione di 2° grado in z

$$az^2+2bz+c=0;$$

si ha identicamente

$$az^2+2bz+c=a(z-\alpha)(z-\beta)$$

per qualunque z, quindi anche

$$a\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2+2b\,\frac{y_1}{y_2}+c=a\left(\frac{y_1}{y_2}-\alpha\right)\left(\frac{y_1}{y_2}-\beta\right)$$

però

$$(10)\qquad ay_1^2+2by_1y_2+cy_2^2=a(y_1-\alpha y_2)(y_1-\beta y_2).$$

Possiamo dunque concludere:

Affinchè una conica sia degenere è necessario e sufficiente che si annulli il suo discriminante Δ; e la conica si spezzerà in due rette distinte (reali od immaginarie) ovvero in due rette coincidenti secondo che la caratteristica di Δ è $=2$, ovvero $=1$.

Dal nostro calcolo risulta ancora che per trovare le rette separate di cui si compone la conica quando $\Delta=0$ basta risolvere un'equazione di 2° grado se le due rette sono distinte, e se coincidono il calcolo si fa razionalmente.

§ 97.
Conica per cinque punti

Nell' equazione generale (8) di una conica entrano 6 coefficienti; ma siccome, senza cangiare l'equazione, si può dividerla per uno dei suoi coefficienti che sia $\neq 0$, così la totalità delle coniche nel piano dipende in realtà da _cinque_ parametri, dai rapporti di 5 dei coefficienti a_{ik} al 6°. Perciò l'insieme di tutte le coniche del piano è un ente geometrico a 5 dimensioni o, come si dice, le coniche del piano sono ∞^5.

Se imponiamo alle coniche (8) la condizione di passare per un determinato punto $P' \equiv (x_i')$ del piano, questa condizione si traduce nella equazione _lineare_ _dei_ _coefficienti_ a_{ik}:

(11) $a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0$,

Onde determinare una conica per punti converrà dunque dare _cinque_ punti della curva, perchè allora le 5 equazioni come la (11) che si ottengono serviranno in _generale_ a determinare i 5 rapporti incogniti, ossia i 6 coefficienti a_{ik} a meno di un fattore comune, e la conica risul-

terà quindi individuata. Dunque: Per cinque punti del piano dati ad arbitrio passa una ed in generale una sola conica.

Conviene osservare più da vicino quale può essere il caso d'eccezione, quando accadrà cioè che per cinque punti passi più d'una e quindi infinite coniche. Perchè ciò sia bisogna che una almeno delle cinque equazioni lineari sopra considerate sia una conseguenza delle altre quattro, ossia che tutte le (infinite) coniche che passano per certi quattro dei punti dati A, B, C, D passino anche per il punto E.

Per ciò è necessario che tre almeno di quei punti A, B, C, D siano allineati; altrimenti le due coniche formate dalle coppie di rette (AB, CD), (AC, BD) non passerebbero certo tutte due per E. Siano dunque p. e. A, B, C in linea retta; allora tutte le coniche che passano pei 5 punti debbono spezzarsi nella retta ABC ed in una retta residua che deve contenere gli altri due punti D, E se nessuno di essi cade sulla retta ABC. Vi sarebbe in tal caso una sola conica pei 5 punti, la conica degenere nelle due rette ABC, DE. Concludiamo: Cinque punti individuano sempre una ed una sola conica a meno che quattro di essi non giacciano

in una retta. Questo è veramente un caso d'eccezione perchè la retta dei quattro punti ed una seconda retta arbitraria pel quinto formano una conica (degenere) pei cinque punti. Naturalmente l'indeterminazione è ancora maggiore se tutti cinque i punti sono allineati.

– Osservazione –

Facciamo una breve digressione metrica relativa al circolo. Si è visto (§ 88) che ogni circolo del piano passa per i due punti ciclici. Ora osserviamo che qualunque conica (reale) che passi pei due punti ciclici del piano è un circolo. Per dimostrarlo assumiamo coordinate cartesiane omogenee ortogonali (§ 78); per le coordinate dei punti ciclici si ha allora

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \pm i : 0 .$$

Ora se la conica (8), a coefficienti reali, passa per i due punti ciclici (per la qual cosa basta che ne contenga uno[1]) dovrà essere soddisfatta la (8) ponendovi

$$x_1 = 1 , \; x_2 = \pm i , \; x_3 = 0 .$$

ciò che dà

$$a_{11} = a_{22} \quad , \; a_{12} = 0 .$$

(1) Questo perchè supponiamo reali i coefficienti a_{ik}.

L'equazione della curva, in coordinate cartesiane non omogenee x, y, si scrive dunque (divisa per a_{11})(1)

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0$$

e si può porre sotto la forma

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = c\,,$$

avendo α, β, c costanti reali. Perchè questa conica sia reale occorre che sia $c > 0$ e ponendo $c = r^2$, si vede ben che essa è un circolo. Se invece $c < 0$ la conica è immaginaria e si dice un circolo immaginario; che se $c = 0$ allora è degenere nella coppia di rette cicliche uscenti dal punto (α, β) e queste possono ancora riguardarsi come un circolo (degenere)

---

(1) Se fosse $a_{11} = 0$ l'equazione (δ) sotto forma omogenea diventerebbe

$$x_3(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

e la conica si spezzerebbe nella retta all'infinito ed in una a distanza finita. Siccome la prima contiene i due punti ciclici possiamo ancora riguardare questa conica come un circolo, conformemente al modo ordinario di considerare la retta come caso limite di un circolo ossia come un circolo col centro a distanza infinita.

Brevemente: un circolo è una conica che passa pei due punti ciclici. Dopo ciò s'intende perchè a determinare una conica occorrono 5 punti e per un circolo ne bastano 3, poichè già la condizione d'essere un circolo assegna alla conica due altri punti, i punti ciclici.

"§ 98"

Generazione delle coniche per fasci projettivi

Consideriamo una qualunque conica e sopra di essa fissiamo due punti A_1, A_2 dai quali projettiamo un punto P mobile sulla conica mediante i due raggi A_1P, A_2P e dimostriamo che, riguardandoli nei due fasci di centro A_1, A_2 i due raggi A_1P, A_2P come corrispondenti, i due fasci sono projettivi.

Per semplicità prendiamo i due punti fissi A_1, A_2 sulla conica come punti fondamentali

$$A_1 \equiv (1, 0, 0) \quad , \quad A_2 \equiv (0, 1, 0),$$

e sia la (8) l'equazione della conica. Essa deve essere soddisfatta tanto ponendosi

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0$$

come

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0;$$

e perciò $a_{11} = a_{22} = 0$. La (8), divisa per x_3^2, assume la forma

$$(12) \qquad 2a_{12}\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_2}{x_3} + 2a_{13}\frac{x_1}{x_3}\; 2a_{23}\frac{x_2}{x_3} + a_{33} = 0.$$

bilineare nei rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$. Ma percorrendo il punto $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ la conica, i due rapporti $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_1}{x_3}$ danno le rispettive coordinate non omogenee dei raggi A_1P, A_2P nei due fasci di centri A_1, A_2; questi due fasci sono dunque projettivi (§ 72), come si era asserito. Concludiamo:

I) Ogni conica può riguardarsi come il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti in due fasci projettivi coi centri in due punti qualunque della conica.

Ma invertendo le considerazioni precedenti si dimostra, con eguale facilità il teorema inverso:

II) Il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti di due fasci projettivi non concentrici e situati in uno stesso piano è una conica che passa pei due centri dei fasci.

Prendiamo infatti i due centri A_1, A_2 dei

fasci come punti fondamentali $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$.

Se $P \equiv (x_1 x_2 x_3)$ è il punto d'incontro di due raggi corrispondenti $A_1 P$, $A_2 P$ sarà $\frac{x_2}{x_3}$ la coordinata projettiva del raggio $A_1 P$ nel fascio di centro A_1 e similmente $\frac{x_1}{x_3}$ quella del raggio $A_2 P$. Dunque fra $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ avrà luogo una relazione bilineare della forma (12) e P descriverà quindi una conica che passa per A_1, A_2, c.d.d.

I teoremi I) II) che abbiamo così dimostrato formano, come ben si sa, il fondamento per lo studio delle coniche secondo la geometria projettiva.

Osserviamo che al teorema I) si può dare la forma seguente: _È costante il birapporto dei quattro raggi che da un punto mobile sulla conica projettano quattro punti fissi A, B, C, D della conica._ Questo birapporto dicesi anche il birapporto dei quattro punti A, B, C, D sulla conica. Suppongasi ora in particolare che la conica sia un circolo e prendansi per i due punti C, D i punti ciclici. Ricordando la definizione projettiva dell'angolo (§ 75), il teorema generale superiore si riduce all'altro ben noto della geometria elementare: _L'angolo che in-_

siste alla circonferenza sopra un dato arco di cerchio è costante.

§ 99.

Punti d'incontro di una retta con una conica.

Per studiare le proprietà fondamentali delle coniche cominciamo dal trattare il problema: trovare i punti d'intersezione di una retta con una conica.

Pensiamo la conica data dalla sua equazione

$$f = \sum_{ik}^{1..3} a_{ik} x_i x_k = 0,$$

e la retta definita come congiungente due suoi punti $P' \equiv (x_1' x_2' x_3')$, $P'' \equiv (x_1'' x_2'' x_3'')$. Un punto qualunque P di questa retta ha coordinate della forma (§80)

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i'',$$

perchè esso appartenga alla conica sarà dunque necessario e sufficiente che si abbia

$$\sum_{ik} a_{ik} (\lambda x_i' + \mu x_i'')(\lambda x_k' + \mu x_k'') = 0,$$

ovvero ordinando

(13) $\lambda^2 \sum_{ik} a_{ik} x'_i x'_k + \lambda\mu\left(\sum_{ik} a_{ik} x'_i x''_k + \sum_{ik} a_{ik} x'_k x''_i\right)$

$$+\mu^2 \sum_{ik} a_{ik} x''_i x''_k = 0.$$

Se si bada che i, k, come indici di sommazione possono essere permutati ed è $a_{ki} = a_{ik}$ si vede che le due somme che formano il coefficiente di $\lambda\mu$ sono eguali fra loro e si può scrivere quindi raddoppiandole

$$\lambda^2 \sum_{ik} a_{ik} x'_i x'_k + 2\lambda\mu \sum_{ik} a_{ik} x'_i x''_k + \mu^2 \sum_{ik} a_{ik} x''_i x''_k = 0.$$

È chiaro che i coefficienti di λ^2, μ^2 sono rispettivamente i valori che assume la forma f ponendo per le x le x' ovvero le x''. Il coefficiente di $2\lambda\mu$ che indicheremo col simbolo $f_{x', x''}$ scritto per disteso, è

(14) $f_{x'x''} = (a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3) x''_1 + (a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{23} x'_3) x''_2$
$+ (a_{31} x'_1 + a_{32} x'_2 + a_{33} x'_3) x''_3$

Per l'identità (2) §93 i coefficienti di λ^2, μ^2 rispettivamente sono da denotarsi con $f_{x'x'}$, $f_{x''x''}$. Così l'equazione (13) assume la forma

(II) $f_{x'x'} \lambda^2 + 2 f_{x'x''} \lambda\mu + f_{x''x''} \mu^2 = 0$

od anche scritta nel rapporto incognito $\frac{\lambda}{\mu}$

(II*) $f_{x'x'} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2 f_{x'x''} \frac{\lambda}{\mu} + f_{x''x''} = 0.$

Come equazione di 2° grado in $\frac{\lambda}{\mu}$ essa ha due radici che possono essere reali e distinte, coniugate immaginarie ovvero reali e coincidenti.(1) Diremo dunque:

Ogni retta reale del piano incontra la conica in due punti che possono essere reali e distinti, coniugati immaginari ovvero reali e coincidenti.

Naturalmente fa eccezione il caso in cui la (II) non è un'equazione ma un'identità essendo

$$f_{x'x'} = f_{x'x''} = f_{x''x''} = 0;$$

allora la conica si spezza in quella retta e in una retta residua.

Diremo _tangente_ una retta r alla conica se i due punti d'intersezione della retta colla conica sono riuniti in un solo punto A e questo si dirà allora il punto di contatto. Veniamo così ad adottare per la definizione di tangente in un punto A di una conica quella elementare che dà Euclide per la tangente al cerchio

---

(1) Si ricordi che supponiamo l'equazione $f_{xx} = 0$ della conica a coefficienti reali.

come di una retta che uscendo da A incontra ivi soltanto la conica.

§100

Tangente e sua equazione

Nel § prec. non abbiamo fatto altro che ripetere pel caso particolare delle curve di 2° grado quanto esponemmo in generale, al § 84, per le curve algebriche. Ora veniamo effettivamente a dimostrare che: <u>In ogni punto di una conica esiste una ed una sola tangente (salvo il caso d'eccezione di più avanti).</u>

Sia $A \equiv (y_1 y_2 y_3)$ un punto qualunque della conica e $P \equiv (x_1 x_2 x_3)$ un punto qualsiasi del piano. L'equazione fondamentale (II*) per la retta AP si scrive

$$(15) \qquad f_{xx}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2 f_{xy}\frac{\lambda}{\mu} + f_{yy} = 0;$$

ma poichè il punto $(y_1 y_2 y_3)$ è sulla conica si ha $f_{yy} = 0$ e l'equazione ha una radice nulla corrispondente al fatto che uno dei punti d'incontro della retta colla conica è il punto A stesso.

Affinchè la AP incontri solo in A la conica (sia tangente in A) è necessario e sufficiente che

anche la 2ª radice di $\frac{\lambda}{\mu}$ della (15) sia nulla che cioè sia:

$$f_{xy} = 0$$

ossia sviluppando secondo la (14)

$$(16)\ (a_{11}y_1 + a_{12}y_2\ a_{13}y_3)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)x_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)x_3 = 0$$

od anche

$$(16^*)\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ a_{13}x_3)y_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)y_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)y_3 = 0.$$

Le y essendo fisse, questa equazione ci rappresenta una retta, passante per $(y_1 y_2 y_3)$ a causa di $f_{yy} = 0$, che è dunque la sola tangente nel punto $(y_1 y_2 y_3)$ alla conica. Così è dimostrata l'esistenza di una unica tangente ed è trovata in pari tempo la sua equazione (16) o (16*), che, colla notazione delle derivate parziali, può scriversi

$$(17)\qquad x_1 \frac{df_{yy}}{d_{y_1}} + x_2 \frac{df_{yy}}{d_{y_2}} + x_3 \frac{df_{yy}}{d_{y_3}} = 0.$$

Il ragionamento precedente cade in difetto nel solo caso che la (16) non sia più un'equazione ma un'identità, annullandosi insieme i tre trinomii

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$
$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3.$$

Ma allora si annulla anche il discri-

minante e la conica è degenere in una coppia di rette.

Di più siccome, risultando la (16) un'identità, qualunque retta uscente da $(y_1 y_2 y_3)$ incontra ivi soltanto il luogo, è chiaro che il punto $(y_1 y_2 y_3)$ trovasi necessariamente nel punto d'incrociamento della coppia di rette se queste sono distinte, mentre se coincidono può essere un punto qualunque della retta stessa. Concludiamo: Indeterminazione della tangente di una conica in un punto vi ha soltanto quando la conica si spezza in due rette uscenti da questo punto.

"§101"

La tangente come posizione limite di una corda.

Si è già accennato nel §84 (nota) ad una seconda definizione di tangente che vale per una curva qualsiasi (algebrica o trascendente). Questa seconda definizione, di carattere infinitesimale, riguarda la tangente in un punto A di una curva come posizione limite a cui tende una corda AB della curva di cui il secondo estremo B si faccia indefinitamente avvi-

cinare al primo fisso in A. Sarà opportuno dimostrare che le due definizioni nel caso delle coniche coincidono, eccettuato soltanto quando si tratti di una conica degenere di cui A sia il punto doppio (1).

Prendiamo il punto fisso A per vertice (0,0,1) del triangolo fondamentale e la tangente in questo (secondo la definizione elementare) per lato $x_2 = 0$. Secondo la (16), l'equazione della tangente nel punto (0,0,1) è

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0;$$

dovendo questa ridursi alla $x_2 = 0$ sarà

$$a_{13} = a_{33} = 0$$

e l'equazione della curva sarà

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Finalmente allontanando all'infinito il lato $x_3 = 0$ del triangolo fondamentale cangiamo il sistema coordinato in un sistema cartesiano per

---

(1) In questo caso è chiaro che ogni retta per A corrisponde alla definizione elementare di tangente ma non alla infinitesimale secondo la quale vi sono qui propriamente due tangenti distinte in A, le due rette in cui la conica si spezza.

la qual cosa ai rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ dovremo sostituire rispettivamente x, y (§ 78). L'equazione della curva diventa pertanto

(18) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0;$$

essa passa per l'origine ed ha ivi per tangente (nel senso elementare) la retta $y = 0$ (l'asse delle x).

Ora consideriamo una corda qualunque uscente dall'origine e sia t il suo coefficiente angolare, indi $y = tx$ la sua equazione.

Sostituendo questo valore di y nell'equazione della curva abbiamo l'equazione di 2° grado in x:

$$(a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2)x^2 + 2a_{23}tx = 0$$

le cui radici sono le due ascisse degli estremi della corda. La prima radice nulla corrisponde all'estremo fisso nell'origine O, la seconda

$$x = -\frac{2a_{23}t}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2}$$

al secondo estremo B, di cui le coordinate sono adunque

(19) $$x = -\frac{2a_{23}t}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2}, \quad y = -\frac{2a_{23}t^2}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2}.$$

Così troviamo le equazioni parametriche di una conica (qualunque) esprimendo

le coordinate di un punto mobile sulla curva per funzioni razionali (di 2° grado) del parametro t, risultato su cui torneremo più avanti. Qui osserviamo che il valore $t=0$ del parametro corrisponde all'origine $x=0,\ y=0$ (1) poichè il denominatore delle formole (19) per $t=0$ è $=a_{11}$ ed è $a_{11}\neq 0$ altrimenti la conica (18) si spezzerebbe nelle due rette

$$y=0,\ 2a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0,$$

caso escluso. Se adunque nelle (19) facciamo convergere il coefficiente angolare t della corda verso lo zero, il secondo estremo B si avvicinerà indefinitamente al primo estremo, fisso in O, e la corda tenderà dunque verso la posizione limite di coefficiente angolare $t=0$, cioè verso la tangente, c. d. d.

---

(1) È da osservarsi che nessun altro valore di t, nemmeno il valore $t=\infty$ può dare $x=0,\ y=0$. Poichè per $t=\infty$ si annulla bensì x (supposto $a_{22}\neq 0$) ma y diventa invece $\frac{-2a_{23}}{a_{22}}$ che non è zero, altrimenti la conica (18) si spezzerebbe in due rette per l'origine.

§ 102.

Punti coniugati rispetto ad una conica. Retta polare di un punto.

Due punti P', P'' diconsi coniugati armonici o semplicemente coniugati rispetto ad una conica se il segmento $P'P''$ che li unisce è diviso armonicamente dai due punti d'intersezione A, B colla conica (reali od immaginarii). Troviamo la condizione a cui debbono soddisfare le coordinate x_i', x_i'' dei punti P', P'' perchè siano coniugati rispetto alla conica ricorrendo alla equazione fondamentale (II^*).

I valori di $\frac{\lambda}{\mu}$ corrispondenti ai punti P', P'' sono rispettivamente $\infty, 0$ e quelli che corrispondono ai punti A, B d'incontro con la conica sono le radici della (II^*). Affinchè si abbia adunque

$$(P'P''AB) = -1$$

è necessario e sufficiente che le due radici della (II^*) siano eguali e di segno contrario, cioè che si abbia

$$f_{x'x''} = 0.$$

Dunque: Perchè due punti $(x_1' x_2' x_3')$, $(x_1'' x_2'' x_3'')$ siano coniugati rispetto alla conica fondamentale $f_{xx}=0$ è necessario e sufficiente che si annulli l'espressione bilineare $f_{x'x''}$ nelle loro coordinate, cioè che si abbia:

$$(20)\quad f_{x'x''}=(a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3')x_1''+(a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3')x_2''+$$
$$+(a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3')x_3''=0.$$

È ora evidente che ogni punto P' ha infiniti punti coniugati rispetto alla conica, sopra ogni trasversale P'AB condotta per P' colla conica esistendo un tale coniugato armonico P''. Quale è il luogo di tutti i coniugati del punto fisso P'? Per trovare questo luogo basta osservare che il punto mobile P'' deve sempre soddisfare colle sue coordinate variabili alla (20), perciò sostituendo alle sue coordinate x_i'' le coordinate correnti x_i, ne deduciamo:

Il luogo di tutti i coniugati armonici del punto $P'\equiv(x_1' x_2' x_3')$ rispetto alla conica fondamentale $f_{xx}=0$, è la retta rappresentata dall'equazione

$$(21)\quad f_{x'x}=(a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3')x_1+(a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3')x_2+$$
$$+(a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3')=0.$$

Questa retta dicesi la retta polare del punto P' rispetto alla conica.

Come si vede l'equazione della retta pola-

re di un punto $(y_1 y_2 y_3)$ cioè la $f_{yx}=0$ coincide formalmente in quella (16) della tangente; ma qui le y_i sono le coordinate di un punto qualunque del piano mentre nella (16) significavano le coordinate di un punto sulla conica. Ne risulta intanto:

La polare di un punto della conica è la tangente nel punto alla conica.

In nessun altro caso la retta polare di un punto (y_i) passa pel punto stesso; perchè ciò avviene solo quando l'equazione $f_{yx}=0$ della polare è soddisfatta quando $x_i=y_i$, cioè quando $f_{yy}=0$. Così adunque: Se la polare di un punto (y_i) passa pel punto stesso, il punto appartiene alla conica e la polare è la tangente in esso.

È da osservare che la retta polare (21) di un punto reale (x_i') rispetto ad una conica, la cui equazione sia (come supponiamo) a coefficienti reali, è sempre una retta reale, sia la conica reale ovvero immaginaria. Questo è anche visibile geometricamente giacchè quando la conica è immaginaria ogni trasversale reale condotta pel punto reale P' alla conica la incontra in due punti immaginarii coniugati A, B ed il coniugato armonico di P' rispetto ad A, B è quindi reale (§73)

§ 103.

Polarità rispetto ad una conica

Rispetto alla conica fondamentale $f_{xx}=0$ un punto $(y_1 y_2 y_3)$ possiede una retta polare di equazione $f_{yx}=0$. Se indichiamo dunque con $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ le coordinate della retta polare del punto (y_i) avremo le formole:

$$
(III) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ \xi_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ \xi_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases}
$$

Supponiamo ora che la conica sia propria (non degenere), e quindi il discriminante $\Delta = |a_{ik}|$ sia diverso da zero. Risolvendo le (III) rapporto alle y (col trascurare un fattore di proporzionalità), abbiamo le formole inverse:

$$
(IV) \quad \begin{cases} y_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{23}\xi_3 \\ y_2 = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 \\ y_3 = A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 \end{cases}
$$

Queste ci dimostrano che, data ad arbitrio una retta $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ nel piano, esiste uno ed un solo punto $(y_1 y_2 y_3)$ di cui quella retta è la polare; questo punto dicesi il *polo* della retta. Così:
Una conica propria nel piano determina una

corrispondenza biunivoca di punto a retta, in guisa che ad ogni punto corrisponde una retta, la sua polare, e ad ogni retta un punto, il suo polo. I punti che giacciono sulle rette corrispondenti sono i punti della conica e le rette che passano per i punti corrispondenti sono le tangenti di questa (1)".

Le formole (III), (IV) fissano analiticamente questa corrispondenza, che è una particolare projettività fra il piano punteggiato ed il piano rigato e dicesi una correlazione; nel caso nostro correlazione polare.

Facciamo l'osservazione ovvia che: Se la polare del punto P passa pel punto Q inversamente la polare di Q passerà per P. Poichè infatti Q sarà coniugato di P rispetto alla conica e quindi P di Q. Ne segue che se il polo $P \equiv (y_1 y_2 y_3)$ descrive una retta la sua retta polare si rotera attorno ad un punto, il polo di questa retta.

---

(1) Se la conica è degenere la polare di qualsiasi punto passa pel punto doppio; e quindi solo le rette uscenti dal punto d'incrociamento della coppia di rette hanno un polo, anzi infiniti poli che formano la coniugata armonica della polare rispetto alle sue rette.

Dimostriamo di più: Se il polo P descrive una punteggiata la sua retta polare descrive un fascio projettivo alla punteggiata.

E infatti se $(x_i')(x_i'')$ sono due particolari posizioni di P e $(\xi_i')(\xi_i'')$ sono le rispettive loro rette polari, le coordinate del punto mobile P saranno

$$y_1 = \lambda x_1' + \mu x_2'', \; y_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \; y_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$$

e, per le formole fondamentali (III) le coordinate $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ della sua polare P saranno

$$\xi_1 = \lambda \xi_1' + \mu \xi_2'', \; \xi_2'' = \lambda \xi_2' + \mu \xi_2'', \; \xi_3 = \lambda \xi_3' + \mu \xi_3''$$

Dunque $\frac{\lambda}{\mu}$ è la coordinata projettiva del punto mobile P nella punteggiata come anche della retta p nel fascio; per ciò le due forme sono projettive c. d. d.

Sopra una retta arbitraria r del piano esistono infinite coppie di punti coniugati, ogni punto P di r determinandone un secondo coniugato, il punto Q ove r interseca la polare p di P. Per quanto si è visto sopra, i punti P, Q descrivono due punteggiate projettive sovrapposte; ed anzi siccome le coppie si corrispondono in doppio modo abbiamo(1): Sopra una retta r qua-

(1) Analiticamente se $\lambda x_i + \mu x_i''$ sono le coordinate

dunque del piano le coppie di punti coniugati determinano un' involuzione. I punti doppi di questa sono i punti ove r sega la conica.

Se la retta r tocca la conica l'involuzione è degenere.

§ 104"

Rette coniugate. Equazione tangenziale.

Diciamo due rette coniugate rispetto ad una conica quando la seconda contiene il polo della prima e quindi la prima il polo della seconda.

La condizione affinchè due rette di coordinate $\xi_1 \xi_2 \xi_3$; $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ siano coniugate si trova subito osservando che dovendo la seconda retta pas

---

di P e $\bar\lambda x_i' + \bar\mu x_i''$ quelle di Q; perchè P, Q siano coniugati dobbiamo avere

$$\sum_{ik} a_{ik} (\lambda x_i' + \mu x_i'')(\bar\lambda x_k' + \bar\mu x_k'') = 0;$$

questa è una relazione bilineare simmetrica nei rapporti $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\bar\lambda}{\bar\mu}$, da cui il teorema del testo.

sare pel polo $(y_1 y_2 y_3)$ della prima, si deve avere

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0,$$

e sostituendo per la y i loro valori (IV), abbiamo dunque: Affinchè le due rette $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$, $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ siano coniugate rispetto alla conica è necessario e sufficiente che fra le loro coordinate sussista la relazione bilineare

$$(22)\ \sum_{ik} A_{ik}\xi_i\eta_k = (A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3)\eta_1 + (A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3)\eta_2 +$$
$$+ (A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3)\eta_3 = 0.$$

Questa è perfettamente analoga alla

$$f_{x'x''} = 0$$

che esprime la condizione perchè due punti (x'_i), (x''_i) siano coniugati; solo i coefficienti a_{ik} sono mutati negli A_{ik}.

Dal risultato generale precedente si deduce in particolare la condizione affinchè una retta $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ sia tangente alla conica; essa deve allora contenere il proprio polo cioè essere coniugata di sè stessa. Facendo dunque le η nella (22) eguali alle ξ, abbiamo:

<u>Una retta $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ tocca la conica quando le sue coordinate soddisfano l'equazione</u>

$$(V)\qquad \sum_{ik} A_{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

o scritta per disteso

$$(V^*)\quad A_{11}\xi_1^2+A_{22}\xi_2^2+A_{33}\xi_3^2+2A_{12}\xi_1\xi_2+2A_{13}\xi_1\xi_3+2A_{23}\xi_2\xi_3=0$$

L'equazione (V) dicesi perciò l'equazione <u>tangenziale</u> della conica; essa è l'equazione della conica, considerata come inviluppo della sua tangente (§85). Essendo la (V) di 2° grado, come l'equazione della conica in coordinate di punti, si conclude:

<u>Le curve (proprie) di 2° grado sono anche di seconda classe, cioè da ogni punto del piano partono due tangenti alla curva reali od immaginarie, distinte o coincidenti</u> (1)

---

(1) Se la conica è degenere in una coppia di rette distinte, siccome è nullo Δ, e quindi tutti i minori di 2° ordine nel determinante reciproco $|A_{ik}|$, la forma quadratica $\sum_{ik} A_{ik}\xi_i\xi_k$ è il quadrato di una forma lineare (§95 B), che eguagliata a zero dà l'equazione del punto doppio del luogo. Ulteriormente se la conica degenera in due rette coincidenti, tutti i coefficienti A_{ik} sono nulli e l'equazione tangenziale (V) è identicamente soddisfatta, corrispondentemente al fatto che ogni retta del piano, incontrando il luogo in due punti riuniti, è da dirsi tangente.

Attorno ad ogni punto R del piano abbiamo infinite coppie di rette coniugate; queste proiettano evidentemente le coppie di punti coniugati sulla polare r di R. Ne deduciamo il teorema correlativo di quello alla fine del § prec.

<u>Le infinite coppie di rette coniugate rispetto alla conica attorno ad un punto R formano un'involuzione, i cui raggi doppi sono le due tangenti uscenti da R alla conica.</u>

Se il punto R giace sulla conica l'involuzione è degenere.

§ 105.

Forme particolari dell'equazione della conica.

Veniamo ora a considerare alcune forme semplici, particolarmente importante, a cui si può ridurre l'equazione di una conica prendendo in modo conveniente il triangolo di riferimento.

Un triangolo ABC dicesi <u>autoconiugato</u> o <u>polare</u> rispetto ad una conica se ciascun vertice è il polo del lato opposto. Esistono ∞^3 tali triangoli, poichè si vede subito che, per definire un tale triangolo, si può scegliere ad arbitrio un

vertice e, sulla polare di questo, un secondo vertice.

Prendiamo ora per triangolo di riferimento un triangolo f autoconiugato. Le polari dei tre vertici hanno per equazioni (21) rispettivamente

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \text{ pel vertice } (1,0,0)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad " \quad " \quad (0,1,0)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \quad " \quad " \quad (0,0,1),$$

e poichè, per ipotesi, queste debbono essere le rispettive rette

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

ne segue che si ha necessariamente

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

cioè l'equazione della curva si riduce a contenere i soli quadrati:

$$(28) \qquad f_{xx} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Viceversa è subito visto che se l'equazione della curva ha questa forma speciale, il triangolo di riferimento è autoconiugato. Il resultato ottenuto si può enunciare sotto forma puramente algebrica così:

<u>Una forma quadratica (ternaria) qualsiasi si può sempre ridurre con una sostituzione lineare (in ∞^3 modi diversi) a contenere i soli quadrati delle variabili, o, come si dice, a forma</u>

canonica.

Un resultato analogo vale del resto per ogni forma quadratica, in un numero qualsiasi di variabili.

Un'altra forma semplice dell'equazione di una conica si ottiene prendendo un triangolo di riferimento $A_1 A_2 A_3$ formato da una corda $A_1 A_2$ della conica e dalle tangenti negli estremi della curva. Allora poichè i due lati

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 0$$

toccano la conica rispettivamente in

$$A_1 \equiv (1, 0, 0), \quad A_2 \equiv (0, 1, 0),$$

le equazioni delle polari

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0$$

di questi punti debbono coincidere colle $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, e quindi sarà

$$a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

e l'equazione della conica assumerà la forma semplice

$$x_1 x_2 + k x_3^2 = 0 \quad (k = \text{cost}).$$

Se di più prendiamo il punto unità sulla conica, l'equazione diventerà

$$(24) \qquad x_1 x_2 = x_3^2.$$

§ 106.

Le coniche come curve razionali. Collineazioni di una conica in sè.

Le curve di 2° grado appartengono ad una classe speciale di curve algebriche che si dicono razionali. Si indica con tal nome una curva algebrica quando si possono esprimere le coordinate di un punto mobile sulla curva per funzioni razionali di un parametro ausiliario t. Naturalmente se le coordinate sono omogenee, queste funzioni razionali possono anche assumersi intere; per coordinate cartesiane invece le corrispondenti funzioni razionali saranno in generale fratte.

Le curve razionali si dicono anche uniursali o di genere zero. Che le coniche siano curve razionali l'abbiamo già dimostrato incidentalmente al § 101 dove, mediante le formole (19), abbiamo espresso le coordinate cartesiane di un punto mobile sulla curva per funzioni razionali di 2° grado di un parametro t.

La razionalità delle coniche dipende da questo che se si considera un fascio di rette col centro S sulla conica, ad ogni raggio del fascio corrispon-

de un solo punto (oltre S) d'intersezione del raggio colla conica e viceversa, il punto S stesso corrispondente al raggio tangente. La posizione del raggio nel fascio si può far dipendere da un parametro t e le coordinate del punto mobile sulla conica, seconda intersezione del raggio, vengono espresse per funzioni razionali, di 2° grado, di t. Per es. se si prende il centro S del fascio nel vertice (1, 0, 0) del triangolo fondamentale, nell'equazione della conica che passa per (1, 0, 0) è $a_{11} = 0$. Un raggio mobile del fascio di centro S ha l'equazione

$$x_3 = t\,x_2$$

e sostituendo nell'equazione della conica (dividendo per x_2) resta

$$(a_{33}t^2 + 2a_{23}t + a_{22})x_2 + 2(a_{13}t + a_{23})x_1 = 0$$

onde si può fare

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 = -(a_{33}t^2 + 2a_{23}t + a_{22}) \\ x_2 = 2(a_{13}t + a_{23}) \\ x_3 = 2t(a_{13}t + a_{23}). \end{cases}$$

Particolarmente semplici diventano le equazioni parametriche (25) della conica se prendendo il triangolo fondamentale come alla fine del § prec. poniamo l'equazione della conica sotto la forma

$$x_1 x_3 = x_2^2,$$

che è la (24), scambiata x_2 con x_3. Per questa forma dell'equazione abbiamo

$$a_{13} = 1, \quad a_{22} = -2$$

e tutti gli altri coefficienti a_{ik} sono nulli; onde le (25) assumono la forma semplice

$$(26) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t : t^2,$$

ovvero anche rendendo omogeneo il parametro col porre $t = \frac{\lambda}{\mu}$

$$(26^*) \qquad x_1 = \mu^2, \quad x_2 = \lambda\mu, \quad x_3 = \lambda^2.$$

Con questa rappresentazione parametrica delle coniche si possono facilmente trattare i problemi relativi alla projettività fra coniche (punteggiate). Qui noi l'applicheremo soltanto al problema di trovare tutte le collineazioni del piano che riconducono la conica in sè e quindi ogni punto corrispondente al valore t del parametro in un altro, che corrisponderà p. e. al valore t' del parametro. E poichè t, t' sono parametri di raggi corrispondenti in fasci projettivi sarà t' una funzione lineare di t, poniamo

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

o, sotto forma omogenea,

$$\begin{cases} \lambda' = \alpha\lambda + \beta\mu \\ \mu' = \gamma\lambda + \delta\mu \end{cases}$$

Per le (26*) avremo dunque

$$x'_1 = (\gamma\lambda+\delta\mu)^2, \quad x'_2 = (\alpha\lambda+\beta\mu)(\gamma\lambda+\delta\mu), \quad x'_3 = (\alpha\lambda+\beta\mu)^2$$

ossia per le (26*) stesse

$$\begin{cases} x'_1 = \delta^2 x_1 + 2\gamma\delta x_2 + \gamma^2 x_3 \\ x'_2 = \beta\delta x_1 + (\alpha\delta+\beta\gamma) x_2 + \alpha\gamma x_3 \\ x'_3 = \beta^2 x_1 + 2\beta\alpha x_2 + \alpha^2 x_3 . \end{cases}$$

Queste formole danno la più generale collineazione del piano che trasforma la conica $x_1 x_3 = x_2^2$ in sè stessa. Concludiamo: *Ogni conica ammette un gruppo di ∞^3 collineazioni del piano che la trasforma in sè medesima.*

§ 107.

Punti comuni a due coniche

Applichiamo ancora la rappresentazione parametrica di una conica alla risoluzione del problema: *Trovare i punti comuni a due coniche.*

Con una trasformazione di coordinate possiamo p. e. ridurre l'equazione di una di queste coniche alla forma $x_1 x_3 = x_2^2$ e sostituire a questa equazione la rappresentazione parametrica

della curva mediante le (26). Allora, se indichiamo nel solito modo con

$$\sum_{i,k}^{1 \dots 3} a_{ik} x_i x_k = 0$$

l'equazione dell'altra conica, è chiaro che ponendo in questa per x_1, x_2, x_3, secondo le (26), i valori 1, t, t^2 avremo un'equazione di 4° grado (1) in t

$$a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0,$$

e siccome una tale equazione ha quattro radici reali od immaginarie, distinte o coincidenti, ne concludiamo: Due coniche si tagliano in quattro punti reali od immaginarii, distinti o coincidenti.

Supponendo, come di consueto, reali i coefficienti delle due coniche, anche l'equazione di 4° grado in t ha coefficienti reali e può quindi presentare rispetto alla realità delle radici i tre casi

---

(1) L'equazione sarà di grado < 4 se $a_{33} = 0$; ma in tal caso la seconda conica passa già pel punto (0, 0, 1) della prima corrispondente a $t = \infty$ e vi sono poi, conforme al teorema generale del testo, altri tre punti d'intersezione corrispondenti alle altre tre radici, ecc.

seguenti:

1° tutte quattro le radici reali; allora le due coniche si tagliano in quattro punti reali

2° due radici reali e due coniugate immaginarie: le due coniche hanno due dell'intersezioni reali, le altre due coniugate immaginarie (Esempio: due cerchi che si tagliano).

3° tutte quattro le radici immaginarie: i quattro punti d'intersezione sono tutti immaginarii, due a due coniugati (Esempio: due cerchi che non si tagliano).

Riguardo poi all'essere i punti d'intersezione distinti o coincidenti, ciò dipende dall'essere la corrispondente radice dell'equazione in t semplice o multipla

Se la radice t considerata è semplice, le due coniche si tagliano semplicemente nel punto corrispondente. Se invece è doppia si toccano in quel punto, cioè hanno in esso la medesima tangente. Se poi è tripla, nel punto corrispondente vengono a cadere tre dei punti d'intersezione delle coniche e si dice che ivi le coniche si osculano. Infine se si ha un'unica radice quadrupla, tutte quattro le intersezioni si riuniscono in un solo punto, ove le due coniche hanno un'iperosculazione. Può anche

darsi il caso di due radici ciascuna doppia ed allora le coniche hanno un doppio contatto, o sono bitangenti. Tutto ciò che abbiamo ora detto riguardo ai casi di radici multiple si intende facilmente quando si pensino questi casi come limiti del caso generale, ove le quattro radici dell'equazione $\overline{\text{iv}}.\underline{4}$ sono distinte. Ma si potrebbe anche dimostrare analiticamente in modo più rigoroso, ciò che qui per brevità tralasciamo.

Capitolo 10°

Proprietà diametrali delle coniche - Riduzione dell'equazione a forma normale.

§ 108.

Classificazione delle coniche in tre specie.

Cominciamo ora lo studio delle proprietà metriche delle coniche e ci serviamo da questo punto in poi di coordinate cartesiane.

Nelle formole generali del Capitolo precedente daremo dunque alle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 il significato di coordinate cartesiane (§ 78), essendo $x_3 = 0$ l'equazione della retta all'infinito ed i rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ dovranno dappertutto essere sostituiti dalle ordinarie coordinate cartesiane x, y.

Così l'equazione della curva generale di 2° grado in coordinate cartesiane si scriverà:

$$(1) \quad f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Una prima classificazione delle coniche dal punto di vista metrico si ottiene considerando il loro modo di comportarsi rispetto alla retta all'infinito. Questa, come ogni altra retta del piano può incontrare la conica

1° in due punti immaginari (coniugati)

2° in due punti reali distinti

3° in due punti reali coincidenti

La conica si dice nel primo caso un'ellisse, nel secondo un'iperbola, nel terzo una parabola. Rispetto all'ultima specie si può anche dire: la parabola è una conica tangente alla retta all'infinito.

Mentre dal punto di vista proiettivo tutte le coniche (proprie) sono identiche, poichè qualunque conica può trasformarsi in un'altra mediante una collineazione (anzi con ∞^3 collineazioni (§ 106)), le tre specie differiscono per la loro forma e in generale per le proprietà metriche.

Facciamo subito un'osservazione che riguarda l'essere la conica immaginaria piuttosto che reale. Una conica (propria), rappresentata come noi supponiamo da un'equazione (1) a coefficienti reali, è interamente reale se ha un punto A reale; poichè ogni raggio per A incon-

ra la conica in un secondo punto necessariamente reale e la conica è dunque un luogo di punti reali. Si vede già di qui che un'iperbola ed una parabola sono sempre curve reali mentre nel genere ellisse la curva può essere reale o immaginaria.

Vediamo ora come si distinguono le tre specie dai valori dei coefficienti nella equazione (1). Se adopriamo di nuovo coordinate (cartesiane) omogenee ed intersechiamo la conica colla retta all'infinito $x_3 = 0$, resta per determinare il rapporto $x_1 : x_2$ l'equazione di 2° grado

$$(2) \qquad a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 .$$

Se consideriamo una delle rette che dall'origine O vanno ai punti all'infinito della curva ed indichiamo con <u>m</u> il suo coefficiente angolare, la sua equazione è

$$y = m x,$$

ossia, in coordinate omogenee $x_1\, x_2\, x_3$

$$x_2 = m x_1 .$$

Facendo adunque nella (2) $x_2 = m x_1$, abbiamo il resultato: <u>I coefficienti angolari delle direzioni che (da un punto qualunque del piano) vanno ai punti all'infinito della conica sono le radici della equazione di 2° grado</u>

(3) $$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

Ora queste sono immaginarie quando

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

è negativo, reali e distinte se è positivo e reali coincidenti quando è nullo. Il binomio scritto non è altro che il minore A_{33} del discriminante Δ; dunque possiamo enunciare il resultato/:

La conica rappresentata dall'equazione (1) è un'ellisse quando $A_{33}>0$, un'iperbola se $A_{33}<0$, infine una parabola se $A_{33}=0$.

In quest'ultimo caso, essendo nullo il discriminante della forma binaria quadratica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

questa è, salvo un fattore, il quadrato di una forma lineare. Dunque: il caso parabolico è caratterizzato da questo che l'insieme dei termini di 2° grado nella sua equazione è un quadrato perfetto/.

In ciò che precede si è supposto la conica propria, cioè $\Delta \neq 0$. Se $\Delta = 0$ la conica è degenere e precisamente nel caso ellittico $A_{33}>0$ in una coppia di rette immaginarie coniugate con un unico punto reale pel luogo, il punto d'incontro

(a distanza finita) delle due rette; nel caso iperbolico $A_{33} < 0$ in una coppia di rette reali convergenti ed in fine nel caso parabolico $A_{33} = 0$ in una coppia di rette parallele reali od immaginarie, distinte o coincidenti.

Tutto ciò è chiaro geometricamente ove si considerino i punti all'infinito del luogo.

§ 109.

Le tre specie di sezioni nel cono circolare retto.

Studieremo in seguito più da vicino le diverse forme di una curva di 2° grado a seconda della specie cui appartiene, e ciò sulle loro equazioni, ridotte alla forma più semplice.

Ma per averne già fin d'ora un'idea approssimata basterà considerare come nelle sezioni piane del cono circolare (retto) si possono avere tutte tre le specie di coniche a seconda della giacitura del piano seguente.

Dato un cono circolare retto ed un piano π, del quale vogliamo esaminare la sezione col cono, prendiamo il vertice del cono per origine degli assi ortogonali, il piano $x\,y$ paral-

lelo al piano π prendendo per asse delle x la proiezione dell'asse del cono su questo. I coseni di direzione dell'asse del cono saranno

$$\cos\alpha\,,\quad \cos\beta = 0\,,\quad \cos\gamma = \operatorname{sen}\alpha$$

essendo α l'angolo d'inclinazione dell'asse del cono sul piano xy.

L'equazione del cono sarà (§49)

$$(4)\qquad (x\cos\alpha + z\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos^2\theta\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

essendo θ l'angolo d'apertura del cono.

Intersechiamo il cono col piano π parallelo al piano xy, la cui equazione sarà

$$z = h\,;$$

ponendo questo valore di z nella (4) otteniamo l'equazione della proiezione ortogonale della curva che vogliamo esaminare sul piano xy, proiezione che è eguale alla curva obiettiva, perchè fatta sopra un piano parallelo. Ora la (4) fattovi $z = h$ diventa

$$(5)\quad (\cos^2\theta - \cos^2\alpha)x^2 + \cos^2\theta\, y^2 - 2h\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, x + h^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0$$

Siccome qui abbiamo

$$a_{11} = \cos^2\theta - \cos^2\alpha\,,\quad a_{12} = 0\,,\quad a_{22} = \cos^2\theta\,,$$

il segno di A_{33} è quello di $\cos^2\theta - \cos^2\alpha$, e supponendo dunque, come è lecito, gli angoli θ, α acuti abbiamo

1° un'ellisse se $\theta < \alpha$

2° un' iperbola se $\theta > \alpha$.

3° una parabola per $\theta = \alpha$.

Per contraddistinguere meglio i tre casi osserviamo che segando il cono col piano xy stesso, parallelo al piano segante π, otteniamo la curva sezione facendo nella (5) $h = 0$ ciò che dà

$$(\cos^2\theta - \cos^2\alpha)\,x^2 + \cos^2\theta\, y^2 = 0$$

La sezione è degenere in una coppia di generatrici del cono, che sono immaginarie nel caso ellittico, reali e distinte nell'iperbolico e reali coincidenti nel parabolico.

Nel primo caso il piano xy incontra il cono nel solo vertice, giacendo fra l'una e l'altra falda del cono; il piano parallelo π incontra quindi tutte le generatrici del cono a distanza finita da una stessa parte del vertice, cioè taglia una sola falda del cono in una linea chiusa di forma ovale d'ellisse.

Nel secondo il piano xy intersecando il cono, il piano parallelo π taglia le generatrici parte da una banda parte dall'altra del piano xy, cioè interseca l'una e l'altra falda del cono. La curva si compone così di due rami ciascuno dei quali è infinito, i due punti all'infinito essendo quelli delle due generatrici parallele a π; la sezione

è un'iperbola.

In fine se queste due generatrici coincidono il piano π è parallelo al piano $x\,y$ tangente al cono ed interseca, come nel caso ellittico, una sola falda del cono; ma questa volta in un ramo infinito di curva che costituisce la parabola

§ 110

Equazione fondamentale in coordinate cartesiane

Andiamo ora a scrivere le equazioni fondamentali della teoria delle coniche sviluppate al Capitolo precedente, adoperando coordinate cartesiane x, y nella qual cosa dobbiamo tenere presenti le due regole seguenti:

1° Per passare dalle coordinate omogenee (cartesiane) di un punto $x'_1\, x'_2\, x'_3$ a distanza finita a quelle cartesiane non omogenee x', y' basta fare

$$x'_3 = 1\,,\quad x'_1 = x'\,,\quad x'_2 = y'$$

2° Se il punto x'_1, x'_2, x'_3 è all'infinito dobbiamo fare invece $x'_3 = 0$ e sostituire al rapporto $\frac{x'_2}{x'_1}$ il coefficiente angolare cartesiano m che segna la direzione. Spesso però converrà meglio porre questo coefficiente angolare sotto forma omogenea $\frac{m}{n}$ ed allora fare-

noi

$$x_1' = n, \quad x_2' = m, \quad x_3' = 0.$$

Ciò premesso, cominciamo dallo scrivere, in coordinate cartesiane l'equazione fondamentale (II) §99, che serve a trovare i punti d'incontro colla conica della congiungente due punti P', P'' che supporremo senz'altro a distanza finita. Porremo dunque nelle formole del §99

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = 1$$
$$x_1'' = x'', \quad x_2'' = y'', \quad x_3'' = 1,$$

e per far combinare le formole

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$$

colle ordinarie cartesiane

$$x = \frac{m x'' + n x'}{m+n}, \quad y = \frac{m y'' + n y'}{m+n},$$

dovremo porre $\lambda = \frac{m}{m+n}$, $\mu = \frac{m}{m+n}$. Con ciò l'equazione fondamentale (II) §99 diventa

$$\text{(I)} \quad f(x'', y'')\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2 f_{x'x''} \frac{m}{n} + f(x', y') = 0,$$

dove

$$\text{(b)} \quad f_{x'x''} = (a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}) x'' + (a_{12} x' + a_{22} y' + a_{23}) y'' + a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33}$$

Di cui deduciamo subito: <u>la retta polare di un punto (x', y') a distanza finita rispetto alla conica ha per equazione</u>

$$(7)\ (a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13})x+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23})y+a_{31}x'+ \\ +a_{32}y'+a_{33}=0;$$

se il punto $(x'y')$ è sulla conica, questa è l'equazione della tangente nel punto.

§ 111.

Punti interni od esterni

Per analogia di ciò che accade nel caso del cerchio un punto fuori di una conica si dice <u>interno</u> a questa quando le due tangenti per il punto alla conica sono immaginarie, <u>esterno</u> quando sono reali (e distinte).

Vogliamo ora stabilire un criterio per riconoscere, data l'equazione $f(x,y)=0$ della conica e le coordinate $(x'y')$ del punto, se il punto è interno od esterno alla conica.

Supponiamo dapprima che il punto di cui si tratta sia nell'origine O e sia

$$y=mx$$

l'equazione di una delle tangenti da O alla conica, ossia in coordinate omogenee

$$mx_1-x_2=0.$$

Le coordinate di questa retta sono

$$\xi_1=m,\ \xi_2=-1,\ \xi_3=0$$

e introducendo questi valori nella equazione tangenziale (V^*) § 104 ne deduciamo:

<u>I coefficienti angolari delle due tangenti tirate dall'origine O alla conica sono le radici della equazione di 2° grado:</u>

$$(8) \qquad A_{11} m^2 - 2 A_{12} m + A_{22} = 0$$

Ora queste sono immaginarie se

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 > 0.$$

reali se

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 < 0.$$

Ma, per un noto teorema sui minori di 2° ordine del determinante reciproco si ha

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 = \Delta \cdot a_{33},$$

essendo Δ il discriminante della conica.

Dunque l'origine è interna od esterna alla conica secondo che $\Delta a_{33} > 0$ o $\Delta a_{33} < 0$.

Si avverta che il caso intermedio $\Delta a_{33} = 0$ può darsi soltanto (la conica essendo supposta propria e quindi $\Delta \neq 0$) quando $a_{33} = 0$; ma allora l'origine è sulla conica.

Trovato il criterio per l'origine, lo estendiamo facilmente ad un punto qualsiasi (x', y') del piano trasportandovi, con una traslazione degli assi, l'origine mediante le formole

$$(9) \qquad x = X + x', \quad y = Y + y'.$$

La nuova equazione della conica essendo

$$f(X+x', Y+y')=0$$

il nuovo termine noto è

$$a'_{33}=f(x',y')$$

ed indicando con Δ' il nuovo discriminante, sarà dunque (x',y') interno od esterno secondo che $\Delta' f(x',y') \gtrless 0$. Ma pel teorema generale sui discriminanti delle forme quadratiche dimostrando al § 94, il discriminante di una conica conserva sempre lo stesso segno per qualunque trasformazione di assi, come si vede passando dalle coordinate non omogenee a quelle omogenee. Anzi nel nostro caso particolare della traslazione degli assi è $\Delta'=\Delta$, poichè in coordinate omogenee $(x_1 x_2 x_3)$ $(X_1 X_2 X_3)$ le formole (9) si scrivono

$$x_1 = X_1 + x' X_3$$
$$x_2 = X_2 + y' X_3$$
$$x_3 = X_3$$

e il modulo della sostituzione è $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$ (1)

---

(1) Si osservi anche che per un qualunque cangiamento di assi ortogonali il modulo della sostitu-

Concludiamo adunque:

Il punto (x', y') è interno alla conica $f(x, y) = 0$ se il prodotto $\Delta f(x', y')$ è positivo, esterno nel caso contrario.

A complemento del criterio così stabilito osserviamo che, senza alterare la generalità, possiamo supporre a Δ un determinato segno, p. e. il positivo, giacchè se si cambiano di segno tutti i termini di $f(x, y) \equiv 0$, con che l'equazione non muta, Δ come determinante d'ordine impari cangia segno. Nell'ipotesi adunque di $\Delta > 0$, possiamo dire: La conica $f(x, y) = 0$ divide il piano in due regioni, nella regione dei punti interni ove $f(x, y) < 0$ separata da quella dei punti esterni ove $f(x, y) < 0$, dalla linea di confine $f(x, y) = 0$ (cfr. § 26 le cose analoghe per la retta)

Se ora $(x' y')$, $(x'' y'')$ sono due punti P', P'' di regione opposta, i coefficienti estremi della fondamentale (I) hanno segno contrario e per ciò le sue radici sono reali e di

---

zione è $= 1$ e quindi:

Cangiando comunque gli assi ortogonali a cui la conica è riferita, il suo discriminante Δ non cangia.

segno contrario; dunque: la conica attraversa la retta P'P" in due punti l'uno interno l'altro esterno al segmento P'P".

Se invece P'P" appartengono alla medesima regione i coefficienti estremi nella (I) hanno lo stesso segno. Le radici possono essere reali od immaginarie, ma se reali hanno lo stesso segno cioè: i due punti in cui la conica attraversa la retta P'P", se reali, sono ambedue interni od ambedue esterni al segmento P'P".

"§ 112"

Diametri nelle coniche

Consideriamo in una conica un sistema di corde parallele. Sopra ciascuna di queste corde il punto di mezzo è il coniugato armonico del punto all'infinito P_∞ comune alle corde, rispetto ai due estremi della corda (reali od immaginarii coniugati). Il luogo di questi punti di mezzo, coniugati di P_∞ rispetto alla conica, è adunque una retta (§ 102), la polare di P_∞; una tale retta dicesi un diametro della conica.

Così: Il luogo dei punti di mezzo di

un fascio di corde parallele in una conica è una retta (diametro), che dicesi coniugato alla direzione delle corde. Le tangenti nell'estremità del diametro sono parallele alle corde.(1)

Dato il coefficiente angolare $\frac{m}{n}$ delle corde parallele per scrivere l'equazione del diametro coniugato, che le divide tutte per metà, basta considerare che il polo P_∞ di questo diametro ha le coordinate omogenee.

$$x_1' = n, \quad x_2' = m, \quad x_3' = 0.$$

Introducendo questi valori nell'equazione generale (21) della polare e scrivendo al solito x, y per $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, troviamo:

L'equazione del diametro coniugato alle corde di coefficiente angolare $\frac{m}{n}$ è

$$(10) \quad n(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

ovvero, se si denota il coefficiente angolare colla sola lettera m (ponendo $n = 1$)

$$(10^*) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

(1) Questo perchè queste due tangenti escono dal polo P_∞ del diametro.

Si osservi che il coefficiente angolare m' del diametro (10*) è dato da

$$m' = -\frac{a_{11} + a_{12} m}{a_{12} + a_{22} m}$$

e quindi: Fra il coefficiente angolare m delle corde e quello m' del diametro coniugato passa la relazione bilineare simmetrica

(11) $\quad a_{22} m m' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0.$

"§ 113"

Centro

Gli infiniti diametri, come polari dei punti della retta all'infinito formano un fascio il cui centro è il polo della retta all'infinito. Questo punto dicesi il centro della conica, perchè esso gode della proprietà che qualunque corda tirata per esso è ivi bisecata, il coniugato armonico del centro sopra ciascuna corda, rispetto ai suoi estremi (reali od immaginari) essendo all'infinito.

Nell'ellisse e nell'iperbola la retta all'infinito non essendo tangente alla curva il centro è a distanza finita; nella parabola invece il centro è all'infinito nel punto di contatto della parabola colla retta all'infinito, ed i diametri in que[...]

sono paralleli, concorrendo in questo punto.

Volendo trovare nella ellisse e nell'iperbola le coordinate del centro, basta applicare le formole (IV) §103, che danno le coordinate del polo di una retta. Qui la retta di cui cerchiamo il polo essendo la retta all'infinito $x_3 = 0$ colle coordinate $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, per le coordinate del centro le (IV) ci danno

$$(12) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = A_{13} : A_{23} : A_{33}.$$

Dunque: Se nell'equazione della conica è $A_{33} \neq 0$, la conica (ellisse o iperbola) è dotata di centro (a distanza finita) e questo è nel punto di coordinate

$$(13) \qquad x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Se invece $A_{33} = 0$, cioè nel caso parabolico il centro è all'infinito nella direzione di coefficiente angolare $\frac{A_{23}}{A_{13}}$ (direzione dei diametri).

Vera indeterminazione nel centro, secondo le (12), si ha soltanto quando simultaneamente

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0.$$

Allora anche $\Delta = 0$ e la conica è degenere in una coppia di rette che sono parallele,

a causa di $A_{33}=0$. Allora è bene evidente che geometricamente la retta media della striscia compresa fra le due parallele è un luogo di centri per la conica degenere.

Tutto ciò risulta anche dall'equazione generale (10) dei diametri; questi formano un fascio l'equazione (10), essendo una combinazione lineare delle due

$$(14) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

che rappresentano rispettivamente i diametri coniugati alla direzione dell'asse Ox, e dell'asse Oy. Il centro è il punto d'incontro delle due rette (14); esso è a distanza finita ed ha le coordinate (13) quando $A_{33} \neq 0$. Se le due rette (14) sono parallele, senza coincidere, è $A_{33}=0$ ma non insieme A_{13}, A_{23} ed il centro è nel punto comune all'infinito delle due rette (14) il coefficiente angolare delle rette (14) ossia dei diametri della parabola è

$$-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ (1)}$$

---

(1) Sopra abbiamo notato che il coefficiente angolare dei diametri è anche $\frac{A_{23}}{A_{13}}$. Per mostrare l'identi-

Infine se $a_{11}:a_{12}:a_{13}=a_{21}:a_{22}:a_{23}$ le due rette (14) coincidono in un'unica retta tutta costituita di centri, e si ha l'ultimo caso osservato(

"§114"

Diametri coniugati - Assintoti - Assi della conica.

In una conica a centro fra le corde parallele, divise per metà dal diametro coniugato d, possiamo considerare quello d' che esce dal centro esso dicesi diametro coniugato di d. I due diametri d, d' passano ciascuno pel polo dell'altro, cioè ciascuno di essi divide per metà le corde parallele all'altro; essi formano una coppia di diametri coniugati.

Le infinite coppie di diametri coniugati non sono altro che le coppie di rette coniugate uscenti dal centro; i loro coefficienti angolari m, m' sono

---

tà di queste espressioni basta osservare che si ha identicamente

$$a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$$

e quindi, perchè $A_{33}=0$ è $-\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{A_{23}}{A_{13}}$.

legati dalla (11).

Le coppie di diametri coniugati formano un'involuzione; i raggi doppî di questa involuzione sono le tangenti tirate dal centro, che riuniscono dunque il centro coi punti all'infinito della curva. Questi speciali diametri, ciascuno dei quali coincide col proprio coniugato, diconsi gli asintoti della curva e toccano la conica nei due punti all'infinito. Essi sono reali distinti nell'iperbola, immaginarii nella ellisse.

Nel caso della parabola non vi sono diametri coniugati, o propriamente ogni diametro ha per diametro coniugato la retta all'infinito. Questa rappresenta altresì l'unico asintoto della curva.

Il diametro che divide per metà un sistema di corde parallele in una conica è in generale obliquo alla direzione delle corde. È importante la considerazione di quei diametri che sono perpendicolari alle corde coniugate; così diconsi diametri principali o brevemente assi della conica. In effetto ogni tale asse dà un asse di simmetria ortogonale per la curva e viceversa.

Nelle coniche a centro la ricerca degli assi equivale a quella delle coppie di diametri

che sono insieme coniugati ed ortogonali. Ora nella involuzione delle coppie di diametri coniugati vi ha in generale una ed una sola coppia ortogonale sempre reale (§75). Eccezione vi ha soltanto quando tutte le coppie sono ortogonali; ma allora i raggi doppi sono le rette cicliche (§75) e la conica avendo i due punti all'infinito nei punti ciclici è un circolo. Dunque: *In ogni conica a centro esistono due soli assi che sono fra loro perpendicolari; fa eccezione solo il caso del circolo ove ogni diametro è un asse.*

È anche da osservarsi che, a causa della simmetria della conica attorno agli assi, sussiste la proprietà: *Gli assi di una conica a centro sono le bisettrici degli assintoti.*

La ricerca degli assi della parabola è semplicissima. Un tale asse deve avere la direzione di tutti i diametri e dividere per metà le corde perpendicolari. Dunque: *Nella parabola esiste un solo asse, che è il diametro che divide per metà le corde perpendicolari alla direzione dei diametri.*

§ 115

Forme particolari dell'equazione delle coniche - Equazioni normali.

I) Consideriamo dapprima una conica a centro e, presa una coppia qualunque di diametri coniugati, assumiamoli come assi cartesiani per riferirvi l'equazione della curva.

Se si osserva che i due diametri coniugati, insieme colla retta all'infinito, formano un triangolo autoconiugato si vede (§105) che l'equazione della conica in coordinate cartesiane omogenea avrà la forma (23) del §105, cioè conterrà i soli quadrati delle variabili e perciò:

<u>Se gli assi cartesiani Ox, Oy a cui si riferisce una conica a centro costituiscono una coppia di diametri coniugati l'equazione della curva prenderà la forma</u>

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \tag{15}$$

<u>Viceversa se l'equazione della curva ha questa forma, gli assi coordinati sono una cop-</u>

pia di diametri coniugati.

Possiamo dunque ridurre in ∞ modi l'equazione di una conica a centro alla forma semplice (15). Ma fra questi ve ne ha uno solo (escluso il caso del cerchio) in cui gli assi coordinati siano ortogonali; questo è quando per la detta coppia di diametri coniugati si prenda quella dei diametri principali od assi della conica.

Allora la (15) dicesi l'equazione ridotta o normale della conica. Sopra di essa studieremo nei capitoli seguenti le proprietà metriche più importanti delle coniche.

II) Prendiamo per origine delle coordinate un punto qualunque O della curva, per asse delle x il diametro che esce da quel punto e per asse delle y la tangente nell'estremità, che è parallela alle corde divise per metà dal diametro (§ 112). L'equazione della conica mancherà anzitutto del termine costante, poichè la curva passa per l'origine; sarà cioè $a_{33}=0$. In secondo luogo l'equazione della tangente nell'origine essendo per la (7)

$$a_{13}x + a_{23}y = 0$$

e dovendo questa coincidere coll'equazione $x=0$ del-

l'asse y sarà ancora $a_{23}=0$. In fine l'equazione del diametro coniugato all'asse Oy essendo per la 2ª delle (14)

$$a_{21}x + a_{22}y = 0$$

e dovendo ridursi alla $y=0$, sarà anche $a_{12}=0$.

L'equazione della conica resta perciò

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

che risoluta rispetto ad y^2 scriviamo

$$(16) \qquad y^2 = 2px + kx^2$$

ove p, k costanti delle quali la prima p si può supporre positiva, badando nel caso opposto cangiare il senso positivo dell'asse delle x. La conica (16) è un'ellisse se $k<0$ un'iperbola se $k>0$, infine una parabola se $k=0$. Per quest'ultimo caso enunciamo esplicitamente il risultato: L'equazione della parabola assume la forma semplice

$$(17) \qquad y^2 = 2px$$

ogni qualvolta si prenda per asse delle x un diametro e per asse delle y la tangente nell'estremità. In particolare se per quel diametro si prende l'asse della parabola, gli assi x, y sono ortogonali e la (17) dicesi l'equazione ridotta o normale della parabola.

La proprietà delle coniche contenuta nelle formole (16) (17) era nota agli antichi e da

questi espressa in parole. Si ha per l'ellisse $y^2 < 2px$, per la parabola $y^2 = 2px$, per l'iperbola $y^2 > 2px$ e di qui provennero, secondo Pappo i nomi dati a queste curve.

III) Un'ultima forma particolare notevole che vogliamo considerare per l'equazione di una conica è quella della iperbola riferita ai suoi assintoti come ad assi coordinati.

Gli assintoti essendo tangenti alla conica nei punti d'incontro colla retta all'infinito, formano con questa un triangolo fondamentale come quello considerato alla fine del § 105. L'equazione dell'iperbola in queste coordinate cartesiane omogenee assume quindi la forma

$$x_1 x_2 = k x_3^2,$$

ossia in coordinate ordinarie

$$(18) \qquad x\,y = \text{cost}^{te}$$

È questa la forma notevole che prende l'equazione dell'iperbola assumendo come assi coordinati gli assintoti.

§ 116

Trasporto dell'origine nel centro

Abbiamo dimostrato come si possa sem-

per ridurre l'equazione di una conica ad avere, in assi ortogonali, la forma ridotta (15), o la (17), secondo che la conica ha un centro proprio (ellisse od iperbola) ovvero centro improprio (parabola). Studiamo ora a trovare le formole effettive di trasformazione degli assi coordinati che permettono di effettuare questa riduzione, colla qual cosa verremo altresì a dimostrare nuovamente il risultato stesso. Ma lo scopo principale di questo calcolo è la risoluzione dell'importante problema:

A) <u>Data l'equazione di una conica sotto la forma generale</u>

$$(19)\quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

<u>calcolare i coefficienti delle loro respettive equazioni ridotte</u>:

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+a'_{33}=0, \quad o \quad y^2=2px$$

Supporremo per semplicità che gli assi antichi Ox, Oy, a cui si riferisce l'equazione generale (19), siano già ortogonali, e dalle formole così trovate sarà facile dedurre le altre più generali relative ad assi obliqui.

Trattiamo dapprima il caso delle coniche a centro. Per passare dalla forma generale (19) dell'equazione alla ridotta dobbiamo cangiare l'origine e la direzione degli assi coordina-

te, trasportando, la prima nel centro della conica e assumendo per direzioni dei nuovi assi quelle principali, ossia quelle degli assi propri della conica. Gioverà fare le due trasformazioni successivamente e: cioè 1° con una traslazione degli assi trasportare l'origine nel centro, 2° fare ruotare gli assi ausiliari attorno al centro fino a sovrapporli agli assi della conica.

Cominciamo dalla prima trasformazione. Essa si effettua colle solite formole

$$x = X + x', \quad y = Y + y'$$

dove O'X, O'Y sono gli assi ausiliarii coll'origine O' nel centro (x', y') della conica, sicchè x', y' hanno i valori (§143, formola (13))

$$x' = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y' = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Come si scrive l'equazione trasformata nelle variabili ausiliarie X, Y? Prima di tutto osserviamo che in generale:

<u>Quando l'origine delle coordinate è nel centro della conica mancano nella sua equazione i termini lineari; e viceversa se non vi sono i termini lineari l'origine è centro.</u>

Infatti l'equazione della polare dell'origine è

$$a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0,$$

o in coordinate omogenee

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Se l'origine è centro, questa deve coincidere coll'equazione $x_3=0$ della retta all'infinito, e perciò $a_{13} = a_{23} = 0$. Viceversa se $a_{13} = a_{23} = 0$ l'origine è centro.(1)

Ritornando all'equazione della conica nelle variabili ausiliarie X, Y, questa mancherà dei termini di 1° grado. D'altronde è evidente che per le sostituzioni

$$x = X + x', \quad y = Y + y'$$

non variano i coefficienti dei termini di 2° grado; la nuova equazione sarà dunque

$$(20) \qquad a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a'_{33} = 0,$$

dove sarà cangiato solo il termine noto, il cui nuovo valore indichiamo con a'_{33}. Per trovare questo valore basta ricordare che il discriminante della (20) deve es-

---

(1) Invece di riferirci all'equazione della polare possiamo anche fare questa considerazione. Se l'origine è centro ed è (x, y) un punto qualunque della conica anche il simmetrico $(-x, -y)$ sta sulla conica. L'equazione non deve dunque mutare cangiando contemporaneamente di segno x, y; ora ciò accade soltanto quando mancano i termini lineari.

sore eguale a quello Δ della (19) (cf nota al § 111). Ora il discriminante della (20) è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = A_{33} \cdot a'_{33}$$

dunque

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{A_{33}}.$$

Così vediamo che: _Trasportando, con una traslazione degli assi, l'origine delle coordinate nel centro, l'equazione (19) della conica si cangia nell'altra_

$$(21) \qquad a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0.$$

"§ 117"

Rotazione degli assi coordinati

Partendo ora dall'equazione (21), privata dei termini lineari, facciamo rotare gli assi coordinati di un angolo α che lasciamo dapprima indeterminato. Indicando con x, y le nuove coordinate le formule di trasformazione saranno

$$(22)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

La forma binaria quadratica

$$(a)\quad a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2,$$

per questa sostituzione lineare omogenea (ortogonale), si trasformerà in un'altra che indicheremo con

$$(a')\quad a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2$$

e l'equazione (21) si cangerà quindi nell'altra:

$$(21^*)\quad a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0.$$

Calcolando gli effettivi valori dei coefficienti a'_{ik} della formula (a'), troviamo subito le formole:

$$(23)\quad \begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + a_{22}\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ a'_{12} = a_{11}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) + a_{22}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ a'_{22} = a_{11}\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2a_{12}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha. \end{cases}$$

Perchè l'equazione trasformata (21*) assuma la forma ridotta deve essere $a'_{12} = 0$, cioè dobbiamo determinare l'angolo α in guisa che risulti

$$a_{12}(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) = (a_{11} - a_{22})\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

ossia

$$(24)\quad 2a_{12}\cos(2\alpha) = (a_{11} - a_{12})\,\mathrm{sen}(2\alpha),$$

da cui

$$(24^*) \qquad tg(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

L'angolo 2α essendo così determinato per mezzo della sua tangente, il problema è sempre solubile (come sappiamo già per altra via) e l'angolo 2α è determinato a meno di multipli di π, cioè α a meno di multipli di $\frac{\pi}{2}$. Ma è chiaro che aggiungendo ad α dei multipli di quadranti non cangia la nuova coppia di assi coordinati ortogonali. Così abbiamo nuovamente dimostrato: La riduzione dell'equazione della conica alla forma ridotta

$$(25) \qquad a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0$$

è possibile in uno ed in un sol modo.

Questo suppone per altro che l'equazione (24) per $tg(2\alpha)$:

$$2a_{12} = (a_{11} - a_{22})\, tg\, 2\alpha$$

non si riduca ad un'identità. Quest'ultima circostanza si dà solo se $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$; ma allora la conica è un cerchio (§97 - osservazione) ed in questo caso sappiamo bene che il nostro problema è indeterminato, ogni coppia di diametri ortogonali nel cerchio sodisfacendo alla questio-

nef.

§118

Calcolo dei coefficienti $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ dell'equazione ridotta.

Il nostro scopo principale essendo il calcolo dei coefficienti dell'equazione ridotta (25), vediamo che ci restano solo a calcolare a'_{11}, a'_{22}. Questo si potrebbe fare evidentemente calcolando sen α, cos α dal valore (24*) di tg 2α e sostituendoli nelle (23). Ma si può effettuare il nostro calcolo in modo molto più semplice, servendosi del teorema seguente relativo alla trasformazione di una forma binaria quadratica (a) per mezzo di una qualunque sostituzione ortogonale (22):

Se con una sostituzione ortogonale qualunque (22) la forma

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

si cangia in

$$a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2,$$

fra i coefficienti antichi ed i nuovi sussisteranno le due relazioni

$$(\alpha)\qquad a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a^2_{12}$$

$$(\beta)\qquad a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}.$$

La prima formola (α) discende infatti come caso particolare dal teorema generale sui discriminanti delle forme quadratiche (§ 94) quando si badi che il modulo di una sostituzione ortogonale è = 1. La seconda (β) risulta subito sommando le due formole estreme (23). Per le proprietà ora dimostrate le espressioni

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2\,,\quad a_{11}+a_{22}\,,$$

formate coi coefficienti di una forma binaria quadratica, diconsi <u>invarianti</u> rispetto alle sostituzioni ortogonali.

Applicando le formole (α), (β) al caso nostro, ove $a'_{12}=0$, vediamo che delle incognite a'_{11} a'_{22} conosciamo la somma ed il prodotto

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}\,,\quad a'_{11}a'_{22}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\,;$$

essi sono dunque le radici dell'equazione di 2° grado nell'incognita ρ

$$\rho^2-(a_{11}+a_{22})\rho+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

che conviene scrivere sotto forma di determinante

$$(A)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Indicheremo le radici di questa equazione con ρ_1, ρ_2, e scriveremo per ciò l'equazione ridotta (25) della conica sotto la forma

$$(B) \qquad \rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0.$$

Siccome la nostra trasformazione è reale, è chiaro *a priori* che le radici ρ_1, ρ_2 della (A) debbono essere reali. Ma ciò si conferma anche calcolando il discriminante D di questa equazione, che è

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2),$$

ossia

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12}^2,$$

onde D è sempre positivo. Si può anche osservare che si annulla soltanto nel caso del cerchio, come risulta anche dalla (B) supponendo $\rho_1 = \rho_2$.

Riepiloghiamo i resultati ottenuti nella regola seguente: *Data l'equazione della conica a centro*

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

riferita ad assi ortogonali, i coefficienti della equazione ridotta

$$a'_{11} x^2 + a'_{22} y^2 + a'_{33} = 0$$

si calcolano colle formole

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{A_{33}}, \quad a'_{11} = \rho_1, \quad a'_{22} = \rho_2,$$

indicando ρ_1, ρ_2 *le radici (sempre reali) della equazione (A).*

§ 119

Caso di assi primitivi obliqui

Come complemento a queste ricerche, scriveremo anche le formole relative al caso che gli assi primitivi x, y non siano ortogonali, ma comunque obliqui.

Indicando con ω l'angolo degli assi Ox, Oy riduciamo gli assi ortogonali colle formole (13) § 15

$$\begin{cases} x = \dfrac{X \operatorname{sen}\omega - Y \cos\omega}{\operatorname{sen}\omega} \\[2ex] y = \dfrac{Y}{\operatorname{sen}\omega} \end{cases}$$

ed osserviamo che il modulo di questa sostituzione è $= \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}$ e lo stesso modulo conserva se, introducendo coordinate omogenee, la riguardiamo come sostituzione lineare omogenea su tre variabili:

$$x_1 = \frac{X_1 \operatorname{sen}\omega - X_2 \cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}$$

$$x_2 = \frac{X_2}{\operatorname{sen}\omega}$$

$$x_3 = X_3 .$$

Indicando dunque col simbolo $\bar{a}_{ik}$ i nuovi coefficienti nell'equazione trasformata ad assi ortogonali OX, OY, e così con $\bar{\Delta}$ il nuovo discriminante e con $\bar{A}_{ik}$ i nuovi suoi minori, dal teorema § 94 sui discriminanti avremo subito le formole

$$\bar{A}_{33} = \frac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\operatorname{sen} \omega}.$$

Se si scrivono poi le formole effettive pei coefficienti $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{22}$ dei termini di 2° grado, si ha

$$\bar{a}_{11} = a_{11}, \quad \bar{a}_{12} = \frac{a_{12} - a_{11} \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}, \quad \bar{a}_{22} = \frac{a_{11} \cos^2 \omega - 2 a_{12} \cos \omega + a_{22}}{\operatorname{sen}^2 \omega},$$

indi

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} = \dfrac{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \\[2ex] \dfrac{\bar{\Delta}}{\bar{A}_{33}} = \dfrac{\Delta}{A_{33}} . \end{cases}$$

Ed applicando ora alla nuova equazione

$$\bar{a}_{11} X^2 + 2 \bar{a}_{12} X Y + \cdots = 0,$$

che è in assi ortogonali, quanto già si è dimostrato al § precedente abbiamo la regola generale seguente:

<u>Data l'equazione</u>

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

di una conica a centro, riferita ad assi obliqui qualunque, i coefficienti della sua equazione normale

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33} = 0$$

si calcolano dalle formole:

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{A_{33}}\ ,\ \ a'_{11} = \rho_1\ ,\ \ a'_{22} = \rho_2\ ,$$

dove ρ_1, ρ_2 indicano le radici della equazione di 2° grado

$$\rho^2 - \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\,\rho + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\operatorname{sen}^2\omega} = 0,$$

essendo ω l'angolo degli assi.

Osserviamo di passaggio che si è dimostrato così essere le tre espressioni

$$\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\ ,\ \ \frac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2\omega}\ ,\ \ \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

invarianti dell'equazione della conica. Esse sono rispettivamente di 1°, 2° e 3° grado nei coefficienti.

"§ 120"

Classificazione delle coniche a centro

L'equazione ridotta (B) delle coniche a centro dà luogo alla seguente classificazione delle coniche.

Prima di tutto osserviamo che questa riduzione, come appare dal nostro calcolo, vale non soltanto per le coniche proprie ove $\Delta \neq 0$, ma anche per coniche degeneri con $A = 0$.

a) Coniche proprie

Supponendo dapprima che la conica sia propria ($\Delta \neq 0$), potremo scrivere l'equazione ridotta (B) così:

$$(26) \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{H}{C_1}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{C_2}\right)} = 1,$$

avendo posto

$$H = -\frac{\Delta}{A_{33}}.$$

Distinguiamo ora secondo che $A_{33} > 0$, o $A_{33} < 0$

1° Caso

Sia $A_{33} > 0$. Allora, essendo $\rho_1 \rho_2 = A_{33}$ (1), ρ_1, ρ_2 hanno lo stesso segno che può essere quello di H o l'opposto. Se ha luogo la prima cosa, indicando

---

(1) Qui si sono supposti gli assi antichi ortogonali; se sono obliqui è invece

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

ma, rispetto ai segni, la conclusione è la medesima.

con a, b due quantità reali e positive, potremo porre

$$\frac{H}{\rho_1}=a^2, \quad \frac{H}{\rho_2}=b^2$$

e l'equazione della curva assumerà la forma

$$(II) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La curva è un'ellisse reale.

Se invece ρ_1, ρ_2 hanno il segno opposto ad H, potremo

$$\frac{H}{\rho_1}=-a^2, \quad \frac{H}{\rho_2}=-b^2$$

e l'equazione assume la forma

$$(II^*) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

che non può essere soddisfatta da alcun sistema reale di valori di x, y. La curva è quindi totalmente immaginaria o ellisse immaginaria.

Siccome H ha il segno opposto a Δ, mentre, a causa di $A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, a_{11}, a_{22} hanno lo stesso segno, che è quello comune di ρ_1, ρ_2 essendo $\rho_1+\rho_2=a_{11}+a_{22}$, vediamo che: nel caso ellittico $A_{33}>0$ si ha un'ellisse reale quando i prodotti

$$\Delta a_{11}, \quad \Delta a_{22}$$

sono negativi, un'ellisse immaginaria quando

questi due prodotti sono positivi (1)

2° Caso.

$A_{33} < 0$. Allora S_1, S_2 hanno segno contrario, quindi anche

$$\frac{H}{S_1}, \frac{H}{S_2}.$$

Senza alterare la generalità potremo supporre positivo $\frac{H}{C_1}$, negativo $\frac{H}{C_2}$; altrimenti scambieremmo x con y. Indicando sempre con a, b quantità reali e positive, poniamo

$$\frac{H}{S_1} = a^2, \quad \frac{H}{S_2} = -b^2;$$

e la (26) prenderà la forma

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La curva corrispondente è un'iperbole.

Parlando delle equazioni normali della ellisse e dell'iperbola, intenderemo sempre di riferirci a queste forme (II), (III) delle loro equazioni.

---

(1) Si noti bene che la conclusione vale anche per assi cartesiani obliqui, come ortogonali. Ciò risulta p. e. dalla formula $\bar{a}_{11} = a_{11}$ al § 118.

b) Coniche degeneri

Se $\Delta=0$ l'equazione ridotta (B) diventa

$$\rho_1 x^2+\rho_2 y^2=0$$

e la conica si spezza nelle due rette uscenti dall'origine di equazioni

$$x\sqrt{\pm\rho_1}-y\sqrt{\mp\rho_2}=0$$

$$x\sqrt{\pm\rho_1}+y\sqrt{\mp\rho_2}=0.$$

Le due rette sono reali quando ρ_1, ρ_2 hanno segno contrario, cioè per $A_{33}<0$, e sono immaginarie coniugate se $A_{33}>0$. In quest'ultimo caso il luogo ha un solo punto reale, il punto ove si incrociano le due rette (cf §108)

§121"

Riduzione dell'equazione della parabola alla forma normale $y^2=2px$

Veniamo ora al problema di ridurre l'equazione di una parabola

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ $(A_{33}=0)$

a forma normale

$$y^2=2px,$$

avendo per principale oggetto il calcolo della costante p dell'equazione ridotta (parametro)

della parabola) pei coefficienti a dell'equazione data. Supponiamo gli assi attuali Ox, Oy già ortogonali, che le formole relative al caso di assi obliqui se ne dedurranno al solito con facilità.

Cominciamo dal rotare gli assi coordinati attorno all'origine finchè il nuovo asse OX si disponga parallelamente ai diametri della parabola. Nella nuova equazione (1)

$$a'_{11}X^2+2a'_{12}XY+a'_{12}Y^2+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a_{33}=0$$

dovremo avere

$$a'_{11}=a'_{12}=0,$$

perchè il coefficiente angolare m dei diametri della parabola è (§ 113)

$$m=-\frac{a'_{11}}{a'_{12}}=-\frac{a'_{12}}{a'_{22}}$$

e qui, per ipotesi, $m=0$. Siccome poi per cangiamento di assi ortogonali è (§ 118)

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22},$$

avremo $a'_{22}=a_{11}+a_{22}$, e la nuova equazione sarà

$$(87)\quad (a_{11}+a_{22})Y^2+2a'_{13}X+2a'_{23}Y+a_{33}=0,$$

dove ci basterà calcolare il nuovo coefficiente a'_{13}, ciò che si ottiene osservando che il determinante

---

(1) Si noti che il termine noto non cangia.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a_{11}+a_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -a'^2_{13}(a_{11}+a_{22})$$

della nuova equazione è uguale a quello Δ della primitiva, onde

$$(28) \qquad a'_{13} = \sqrt{\frac{-\Delta}{a_{11}+a_{22}}} \;(1)$$

Ed ora con una traslazione degli assi, trasportiamo l'origine in un punto conveniente (α, β) del piano mediante le solite formole

$$X = x + \alpha\,, \quad Y = y + \beta,$$

indicando qui x, y le nuove coordinate. La (27), per queste sostituzioni diventa

$$(a_{11}+a_{22})\,y^2 + 2a'_{13}x + 2\{a'_{23} + \beta(a_{11}+a_{22})\}\,y + (a_{11}+a_{22})\beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33} = 0$$

Ora se possiamo determinare α, β in guisa che si annullino il coefficiente di y ed il nuovo termine noto l'equazione avrà appunto la forma ridotta

$$(a_{11}+a_{22})\,y^2 + 2a'_{13}\,x = 0.$$

Ma per far questo basta prenderne

---

(1) Il segno del radicale si può scegliere a piacere assumendo convenientemente la direzione positiva dell'asse delle X.

$$\beta = -\frac{a'_{23}}{a_{11}+a_{22}}$$

e successivamente determinare α dall'equazione lineare

$$2a'_{13}\alpha = -(a_{11}+a_{22})\beta^2 - 2a'_{23}\beta - a_{33},$$

ciò che è sempre possibile se $a'_{13} \neq 0$, ossia per la (28) se $\Delta \neq 0$, cioè per una parabola propria, quale d'apprima supponiamo.

Così è nuovamente dimostrata la riducibilità dell'equazione della parabola alla forma normale

$$y^2 = 2px,$$

ed inoltre le formole precedenti ci danno anche pel valore del parametro p

$$(29) \qquad p = \frac{1}{a_{11}+a_{22}} \cdot \sqrt{\frac{-\Delta}{a_{11}+a_{22}}}.$$

Questo nell'ipotesi di assi antichi ortogonali; se questi assi saranno invece, inclinati dell'angolo ω, le formole osservate al §119

$$\bar{a}_{11}+\bar{a}_{22} = \frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

$$\Delta = \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

dimostrano che la (29) deve scriversi

$$(29^*)\quad p = \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}\cdot\sqrt{\frac{-\Delta}{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}}$$

"§ 122"

Caso $A_{33}=0$ e $\Delta=0$ - Tabella riassuntiva per le varie specie di coniche

Nell'esaminare il caso parabolico abbiamo escluso nel § precedente il caso in cui $\Delta=0$, ove la conica è degenere in una coppia di rette parallele. Esaminiamo direttamente questo caso per distinguere quando le rette componenti il luogo saranno reali e quando immaginarie.

Essendo $\Delta=0$, $A_{33}=0$, sono anche nulli, in forza di un noto teorema sui determinanti, i minori A_{13}, A_{33}; sussistono cioè fra i coefficienti le relazioni

$$(\gamma)\quad a_{12}a_{23}=a_{22}a_{13}\,,\quad a_{11}a_{23}=a_{12}a_{13}\,,\quad a_{11}a_{22}=a_{12}^2.$$

Per l'ultima di queste non può essere insieme $a_{11}=a_{22}=0$ perchè allora sarebbe nullo anche a_{12} e l'equazione del luogo sarebbe di 1°, non di 2° grado. Poniamo per fissare le idee che sia $a_{11}\neq 0$; e potremo sostituire all'equazione del luogo quella che si ottiene moltiplicandola per a_{11}. Ponendo mente alle (γ), la nuova

equazione si scrive

$$a_{11}^2 x^2 + 2a_{11} a_{12} xy + a_{12}^2 y^2 + 2 a_{11} a_{13} x + 2 a_{12} a_{13} y + + a_{11} a_{33} = 0$$

ovvero

$$(a_{11} x + a_{12} y + a_{13})^2 + A_{22} = 0.$$

Il luogo si scinde quindi nelle due rette parallele

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \pm \sqrt{-A_{22}} = 0,$$

le quali sono reali distinte quando $A_{22} < 0$, immaginarie se $A_{22} > 0$ e coincidenti per $A_{22} = 0$.

Naturalmente se anche $a_{22} \neq 0$ ai criterii dati dai segni di A_{22} si possono sostituire gli analoghi per A_{11}, dove si può osservare che, a causa della formola

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 = A a_{33} = 0,$$

i minori A_{11}, A_{12} hanno lo stesso segno quando siano ambedue diversi da zero. (1)

---

(1) Se uno soltanto di essi è zero il criterio dato da questo minore non riesce decisivo, potendo aver luogo tutti tre i casi. Esempio l'equazione

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} x + a_{33} = 0$$

dove è $A_{11} = 0$ e il ~~luogo~~ può essere composto di due rette parallele reali, immaginarie e coincidenti secondo che $A_{22} < 0$ $A_{22} = 0$ $A_{22} > 0$.

Possiamo ora riassumere i risultati della discussione sulle varie specie di coniche nella tabella seguente

Coniche proprie

$\Delta \neq 0$

$A_{33} > 0$ { ellisse reale se $\Delta a_{11}, \Delta a_{22} < 0$; ellisse immaginaria se $\Delta a_{11}, \Delta a_{22} > 0$ }

$A_{33} < 0$ iperbola

$A_{33} = 0$ parabola

Coniche degeneri

$\Delta = 0$

$A_{33} > 0$ coppia di rette convergenti immaginarie

$A_{33} < 0$ coppia di rette convergenti reali e distinte

$A_{33}=0$ coppia di rette parallele $\begin{cases} \text{reali e distinte per } A_{22}<0 \\ \text{immaginarie se } A_{22}>0 \\ \text{coincidenti se } A_{22}=0 \\ \text{quando } a_{11}\neq 0 \text{ (1)} \end{cases}$

---

(1) Se $a_{11}=0$, allora si sostituisce A_{11} ad A_{22}

Capitolo 11.°

Forma e prime proprietà metriche delle tre specie di coniche

§ 123.

Forma dell'ellisse

L'equazione normale della ellisse è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Se $a = b$, la curva è un circolo di raggio $= a$, caso ovvio che escludiamo. Quando $a \neq b$ possiamo supporre senz'altro

$$a > b,$$

come sempre faremo in seguito, bastando nel caso opposto scambiare le denominazioni degli assi Ox, Oy. Noi vogliamo ora esaminare, sull'equazione (1), la forma che ha la curva. Per questo cominciamo dall'osservare che dovendo aversi per ogni punto della curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

sarà $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ e quindi se consideriamo le quattro rette, due a due parallele agli assi:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b,$$

il corso reale della curva sarà tutto limitato entro il rettangolo da esse racchiuso.

Queste quattro rette incontrano normalmente gli assi nei punti $A \equiv (a, 0)$, $A' \equiv (-a, 0)$, $B \equiv (b, 0)$, $B' \equiv (-b, 0)$ che sono i quattro punti ove l'ellisse incontra gli assi e diconsi vertici della ellisse. In ragione della simmetria della curva attorno ad un asse, ciascun asse incontra normalmente la curva nei due vertici, cioè ivi la tangente della curva è normale all'asse (1)

Basterà esaminare il primo quadrante della curva, cioè la parte della curva entro l'angolo delle direzioni positive degli assi che si reca dal vertice A al vertice B. Ribaltando poi questo attorno all'asse Oy si otterrà il secondo quadrante da B in A' e ribaltando poi la metà della curva così ottenuta attorno all'asse Ox si avrà la seconda metà che si raccorda alla prima nei vertici A, A' e con que-

---

(1) Ciò risulta anche dalla proprietà generale che la tangente nell'estremità di un diametro è parallela al diametro coniugato.

... forma l'ellisse completa.

La (1), risoluta rapporto ad y, dà

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e facendo decrescere x da $\underline{a}$ fino a <u>zero</u>, la ordinata y (positiva) va sempre aumentando da 0 fino a b; nel primo quadrante la curva si reca quindi per ordinate sempre crescenti da A in B (v. figura a))

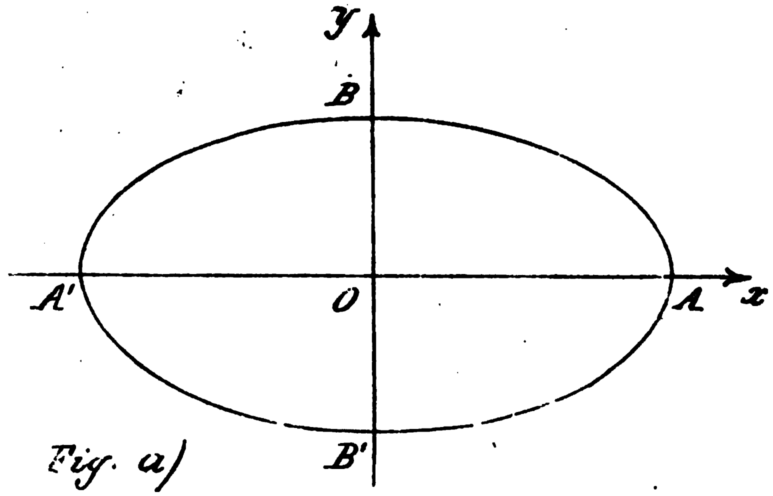


Fig. a)

Le lunghezze $A'A = 2a$, $B'B = 2b$ diconsi gli <u>assi</u> della curva e quindi a, b i semi-assi. Il primo $2a$ è l'asse maggiore, il secondo $2b$ l'asse minore; ogni altro diametro ha una lunghezza compresa fra $2a$, e $2b$, come risulta dalle formole

$$x^2 + y^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)y^2 \geq a^2$$

$$x^2 + y^2 = b^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 \leq b^2.$$

Un'idea chiara della forma della

curva si ha dal paragonarla col cerchio descritto sull'asse maggiore $A'A$ come diametro, ovvero con quello descritto sull'asse minore. L'equazione del primo cerchio è

$$x^2+y^2=a^2$$

e se paragoniamo le ordinate y, y_1 di due punti P, P_1 il primo sull'ellisse, il secondo sul cerchio, e corrispondenti alla medesima ascissa $OM=x$, abbiamo

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad y_1=\sqrt{a^2-x^2}$$

cioè

$$y:y_1=b:a, \quad y=\frac{b}{a}y_1$$

Dunque: accorciando tutte le ordinate P_1M dei punti del circolo nel rapporto ~~costante~~ $\frac{b}{a}$, il luogo degli estremi P delle ordinate accorciate è l'ellisse.

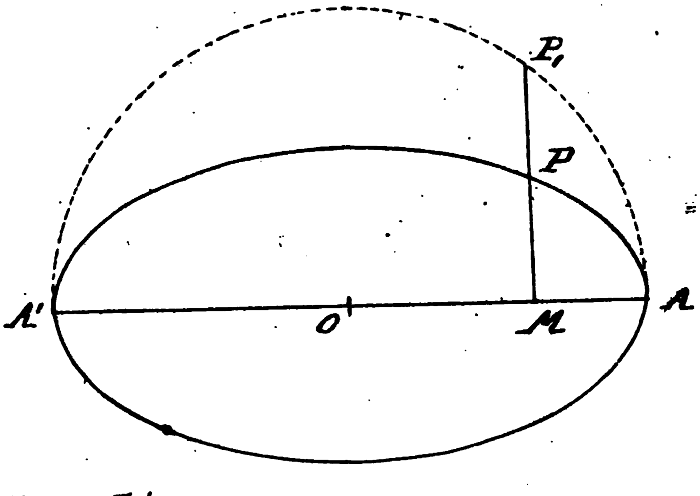


Fig. 3)

Da ude-

sima cosa si può anche significare in questo altro modo. Immaginiamo di rilevare il piano del circolo sul piano dell'ellisse facendolo girare attorno al diametro A'A di un angolo α (fra 0 e $\frac{\pi}{2}$) tale che sia

$$\cos\alpha = \frac{b}{a},$$

indi di proiettare ortogonalmente i punti della circonferenza sul piano dell'ellisse; le projezioni cadranno appunto sulla periferia dell'ellisse. Si vede dunque che: L'ellisse è la projezione ortogonale del circolo sopra un piano obliquo a quello del circolo. In altre parole l'ellisse può considerarsi come sezione retta del cilindro circolare obliquo.

Paragonando medesimamente l'ellisse col circolo

$$x^2 + y^2 = b^2$$

descritto sull'asse minore come diametro, fra le ascisse x, x_1 di due punti dell'ellisse e del circolo corrispondenti alla medesima ordinata y troviamo il rapporto costante

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a}{b}, \quad x = \frac{a}{b}x_1;$$

dunque: protraendo tutte le ordinate di un

circolo in un rapporto costante, il luogo degli estremi delle curve ordinate è un'ellisse, ovvero, ciò che torna lo stesso: l'ellisse è una sezione obliqua del cilindro circolare retto.

Combinando la considerazione dei due circoli C, C' descritti sull'asse maggiore A'A e sull'asse minore B'B come diametri si ottiene la seguente semplice costruzione dell'ellisse per punti. Si consideri un raggio mobile che incontri C in M, C' in M'; le due perpendicolari calate da M, M' rispettivamente sopra A'A, B'B si incontrano in un punto P che percorre l'ellisse.

§ 124

Forma dell'iperbole

Esaminiamo ora sull'equazione normale dell'iperbola

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la forma che ha questa curva. Questa è legata essenzialmente agli assintoti, che sono reali in questo caso, e di cui troviamo subito le equazioni scrivendo la (2) sotto forma omogenea,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = x_3^2$$

ed intersecando colla retta all'infinito $x_3=0$, il che dà per l'equazione complessiva degli assintoti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \ (1)$$

ossia per le equazioni separate

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Il primo assintoto attraversa il 1° e 3° quadrante ed è inclinato sull'asse Ox di un angolo α la cui tangente è

$$(3) \qquad tg\,\alpha = \frac{b}{a};$$

così 2α è l'angolo dei due assintoti bisecato dall'asse Ox.

---

(1) In generale si osservi: Se l'equazione di una conica, l'origine delle coordinate essendo nel centro è data da

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

l'equazione complessiva degli assintoti si scrive

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Scrivendo l'equazione (2) dell'iperbola in coordinate polari, poniamo

$$x = \rho \cos\theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

ed avremo

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2},$$

che si può anche scrivere

$$(4') \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha}\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta\right).$$

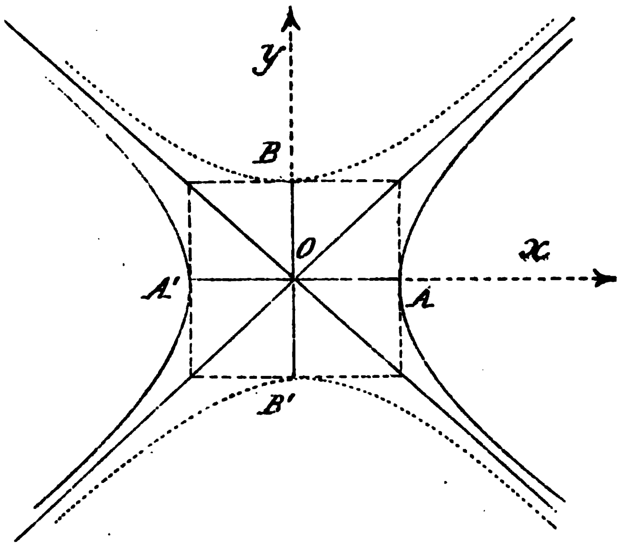
Con questa esaminiamo il primo quadrante dell'iperbola da $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$ e spezziamo quest'intervallo nei due

$$\left(0 \cdots \alpha\right), \left(\alpha \cdots \frac{\pi}{2}\right).$$

Nel secondo essendo $\operatorname{sen}\theta > \operatorname{sen}\alpha$ la (4') dà per ρ un valore immaginario e però la parte reale della curva nel 1° quadrante è tutta nel 1° angolo α, cioè fra la direzione (positiva) dell'asse Ox e l'assintoto 1°. La differenza $\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta$, mentre θ va da $\underline{0}$ ad $\underline{\alpha}$ va continuamente decrescendo da $\underline{\operatorname{sen}^2\alpha}$ a $\underline{0}$ e per ciò il raggio vettore ρ va, sempre crescendo, da $\underline{a}$ a $\underline{+\infty}$. Questo primo quadrante della curva movendo dal punto $A \equiv (a, 0)$ vertice della curva, normalmente all'asse Ox va sempre più allontanandosi dall'origine e tende verso ∞

accostandosi: θ all'anomalia $\underline{\alpha}$ dell'assintoto.[1] Ribaltando questo primo quadrante attorno ad Ox, abbiamo il quarto quadrante che si raccorda al primo nel vertice A' e forma con esso il primo ramo dell'iperbola. Il secondo ramo è il simmetrico del primo rispetto ad Oy.

Fig. c)



Si osservi che l'asse delle x incontra l'iperbola in due punti reali A, A'; questi sono i vertici della curva e l'asse delle $\underline{x}$ dicesi asse traverso od anche asse principale. L'asse delle y invece non taglia la curva in punti reali e dicesi asse immaginario od anche asse secondario.

Per intendere meglio come si comporta l'iperbola rispetto ai suoi assintoti, si consideri p. e. un punto $P \equiv (x', y')$ che partendo dal vertice A percor-

---

(1) Ciò corrispondentemente a quanto già sappiamo che l'assintoto tocca la curva in uno dei suoi due punti all'infinito.

ra il primo quadrante della curva allontanandosi all'infinito. La sua distanza δ dall'asintoto relativo al primo quadrante

$$y - \frac{b}{a}x = 0$$

è data da

$$\delta = \frac{\frac{b}{a}x' - y'}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},$$

ovvero moltiplicando numeratore e denominatore per $\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}$ coll'osservare che $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$

$$\delta = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b}\,(bx'+ay')}.$$

Quanto più P si allontana dal vertice A, tanto più crescono i valori (positivi) di x', y' e perciò: <u>la distanza δ del punto P della curva dell'asintoto va sempre e continuamente diminuendo, tendendo a zero</u>. Così la curva va sempre più accostando all'asintoto senza mai raggiungerlo.(1)

Gli asintoti dividono il fascio dei diametri in due parti, quella compresa nell'angolo 2α degli asintoti e l'altra nell'angolo supplementare.

---

(1) Di qui appunto la denominazione di asintoto.

I diametri della prima specie incontrano l'iperbola in punti reali ed hanno una effettiva lunghezza per la curva, quelli della seconda non tagliano l'iperbola in punti reali. Conviene però attribuire anche ai diametri della seconda specie una lunghezza, quella che hanno effettivamente non per l'iperbola primitiva (2) ma per l'altra che ha l'equazione

$$(2^*) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ottenuta cangiando il segno del termine costante nell'equazione. Questa seconda iperbola che dicesi la *coniugata* della primitiva ha con questa a comune gli assi e gli assintoti, con la differenza che l'asse trasverso dell'una è asse secondario nell'altra: essa giace nei due angoli opposti al vertice degli assintoti che non comprendono parti reali dell'iperbola primitiva (V. figura). Così per l'iperbola primitiva sono $2a$, $2b$ le lunghezze degli assi trasverso e secondario per la coniugata invece $2b$, $2a$. La convenzione introdotta per attribuire ad ogni diametro dell'iper

---

(1) In generale quando un'iperbola sia riferita ai assi coll'origine nel centro, l'equazione dell'iperbola coniugata si ottiene cangiando di segno il

bola un'effettiva lunghezza equivale a scrivere la formula (4) che dà la lunghezza del semidiametro ρ corrispondente all'anomalia θ sotto la forma

$$\frac{1}{\rho^2} = \pm\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}\right)$$

ed a prendere il segno in guisa che il secondo membro sia positivo, cioè il segno + pei diametri della prima specie, il segno - per quelli di seconda specie.

È chiaro che un'iperbola è differente di forma dalla coniugata se $a \neq b$; ma quando $a = b$, allora la seconda iperbola si ottiene dalla prima rotando questa attorno al centro di un angolo retto. La speciale iperbola corrispondente all'ipotesi di $a = b$ è caratterizzata da questo che i suoi assintoti sono fra loro perpendicolari; essa dicesi un'iperbola equilatera.

"§ 125"

Diametri coniugati nell'ellisse e nell'iperbola.

Consideriamo ora insieme alcune proprietà dell'ellisse e dell'iperbola scrivendone l'equazione

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se $(x';y')$ è un punto qualunque del piano l'equazione della sua retta polare si otterrà dalla (7) §110 ponendovi

$$a_{11} = \frac{1}{a^2},\; a_{22} = \pm \frac{1}{b^2},\; a_{33} = -1$$

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$$

e sarà quindi

$$(6) \qquad \frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

In particolare se $(x';y')$ è un punto della curva, questa è l'equazione della tangente nel punto. Il diametro coniugato a quello che va al punto $(x';y')$ è parallelo alla tangente ed ha quindi per equazione

$$(6^*) \qquad \frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0;$$

Il diametro che va al punto $(x'y')$ ha per coefficiente angolare

$$m = \frac{y'}{x'},$$

il coniugato (6^*) ha il coefficiente angolare

$$m' = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'};$$

dunque $mm' = \mp \frac{b^2}{a^2}$. (1) Fra i coefficienti angolari m, m' di due diametri coniugati nell'ellisse ha luogo la relazione $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, nell'iperbola l'altra $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

Di qui segue che in una coppia di diametri coniugati nell'ellisse l'uno attraversa il 1° e 3° quadrante, l'altro il 2° e 4°; nell'iperbola invece attraversano i medesimi quadranti. Di più siccome nell'iperbola l'uno ha coefficiente angolare minore di quello $\frac{b}{a}$ dell'asintoto l'altro maggiore (in valore assoluto) così il primo taglia effettivamente l'iperbola l'altro solo la coniugata.

Consideriamo ora un triangolo PQR inscritto nella conica a centro di cui il lato PQ sia un diametro. Le rette che congiungono il centro O (punto medio di PQ) ai punti medii delle corde PR, RQ sono i diametri coniugati a queste corde e ciascuno è parallelo all'altra corda. Chiamando

---

(1) La stessa cosa si deduce anche subito dalla equazione (11) §112.

dunque corde supplementari di una conica a centro due corde come RP, RQ che uniscono un punto R della curva all'estremità P, Q di un diametro:

Due corde supplementari in una conica a centro sono sempre parallele a due diametri coniugati(1)

---

(1) Analiticamente si dimostra subito così. Siano (x', y'), $(-x', -y')$, (x'', y'') le coordinate rispettive di P, Q, R. Le corde RP, RQ hanno i coefficienti angolari

$$m = \frac{y''-y'}{x''-x'}, \quad m' = \frac{y''+y'}{x''+x'},$$

dunque

$$m\,m' = \frac{y''^2-y'^2}{x''^2-x'^2}.$$

Ma se si tratta p. e. di un'ellisse si ha

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1, \quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$$

e sottraendo $\frac{1}{b^2}(y''^2-y'^2)+\frac{1}{a^2}(x''^2-x'^2)=0$, da cui

$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}$. Analogamente per l'iperbola

$m\,m' = +\frac{b^2}{a^2}$, onde m, m' sono coefficienti angolari di diametri coniugati.

Sotto altra forma si può anche enunciare il teorema così: In ogni parallelogrammo inscritto in una conica a centro le diagonali son diametri coniugati.

E si vede subito che lo stesso teorema vale per un parallelogrammo circoscritto. Cerchiamo ora le formole che date le coordinate x', y' dell'estremità di un semidiametro d' fanno conoscere quelle x'', y'' del semidiametro coniugato d''.

Se si tratta dapprima dell'ellisse avremo per la (6^*)

$$\frac{x''x'}{a^2}+\frac{y''y'}{b^2}=0$$

ed anche

$$\left(\frac{x''}{a}\right)^2+\left(\frac{y''}{b}\right)^2=1.$$

Ma se scriviamo la prima

$$\frac{x''}{a}\cdot\frac{x'}{a}=-\frac{y''}{b}\cdot\frac{y'}{b}$$

e teniamo conto della seconda troviamo subito la formola

$$(7)\qquad \frac{x''}{a}=\pm\frac{y'}{b}\,,\quad \frac{y''}{b}=\mp\frac{x'}{a}\,,$$

dove debbono prendersi insieme i segni superiori o gli inferiori e l'incertezza del segno dipende

Allora si ha $d = d'$, cioè: <u>in un'iperbola equilatera due diametri coniugati hanno sempre uguale lunghezza.</u>

Calcoliamo ora l'area Δ del triangolo $OP'P''$ dalla formola

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = x'y'' - x''y',$$

ove sostituiamo per x'', y'' i valori tratti dalle (7) o dalle (8) secondo che la conica è un'ellisse o un'iperbola. Se adottiamo nelle (7) i segni inferiori abbiamo

$$2\Delta = \frac{b}{a}x'^2 + \frac{a}{b}y'^2 = ab\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = ab$$

prendendo invece nelle (8) i segni superiori

$$2\Delta = \frac{b}{a}x'^2 - \frac{a}{b}y'^2 = ab\left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right) = ab.$$

Di qui abbiamo l'altro teorema d'Apollonio:

<u>In una conica a centro l'area del triangolo racchiuso da due semidiametri coniugati e dalla corda che ne unisce l'estremità è costante</u> (uguale all'area del triangolo rettangolo che ha per cateti i semiassi).

Di più dal significato del segno del-

l'area Δ (§ 28) vediamo che nelle formole (7) per l'ellisse i segni superiori significano che il semidiametro OP'' giace alla destra OP' gli inferiori alla sinistra e nelle formole (8) per l'iperbola le condizioni sono invertite.

Osserviamo che l'ultimo teorema può anche enunciarsi sotto l'altra forma: È costante l'area di un parallelogramma circoscritto ad una conica a centro e i cui lati siano paralleli a due diametri coniugati.

"§ 127"

Distanza del centro dalla tangente - Minimo angolo di una coppia di diametri coniugati nell'ellisse

Essendo

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1$$

l'equazione della tangente in (x', y'), se indichiamo con p la distanza del centro dalla tangente, abbiamo

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2}},$$

ossia per le (7), o per le (8):

$$(10) \qquad p = \frac{ab}{d'}\ ;$$

indicando come sopra con d' la lunghezza del semidiametro parallelo alla tangente.

Dunque: In una conica a centro la distanza di una tangente dal centro è inversamente proporzionale alla lunghezza del diametro parallelo alla tangente.

Se dunque consideriamo un punto che percorra p. e. il primo quadrante partendo dal vertice estremità dell'asse principale la distanza della tangente nel punto dal centro va sempre e continuamente diminuendo nell'ellisse dal valore massimo a al valore minimo b, nell'iperbola dal massimo a fino allo zero. Così nell'iperbola la tangente va sempre più accostandosi al centro quanto più si allontana il punto di contatto sicchè, come era prevedibile, la tangente ha per posizione limite l'asintoto.

Se indichiamo con θ l'angolo (acuto) fra i due semidiametri coniugati d, d' abbiamo evidentemente

$$p = d \operatorname{sen} \theta$$

e per ciò dalla (10)

(11) $$dd' \cdot \operatorname{sen}\theta = ab$$

Ma il primo membro dà il doppio dell'area del triangolo che ha per lati d, d', e ne resulta nuovamente il teorema d'Apollonio (§ prec.) che l'area di questo triangolo è costante.

Nell'iperbola l'angolo θ compreso fra due semidiametri coniugati può assumere i valori estremi 0 (assintoti) e $\frac{\pi}{2}$ (assi) e quindi anche tutti i valori intermedii. Nell'ellisse invece, gli assintoti essendo immaginarii, quest'angolo θ non può scendere a zero e vi ha quindi un minimo α al disotto del quale θ non può scendere; variando la coppia di diametri coniugati l'angolo θ prende tutti i valori da α a $\frac{\pi}{2}$.

Determiniamo questo minimo α. Esso corrisponde al minimo di $\operatorname{sen}\theta$, ossia per la (11) al massimo del prodotto dd', o ciò che è lo stesso al massimo di $d^2d'^2$. Ma, pel 1° teorema d'Apollonio, è costante la somma delle due quantità d^2, d'^2; dunque il massimo del prodotto ha luogo quando d, d' sono uguali. La questione è dunque ricondotta a trovare nell'ellisse una coppia di diametri coniugati d'eguale lunghezza. Ma due

diametri m, m' eguali hanno coefficienti angolari eguali e di segno contrario; se di più sono coniugati è $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ e perciò

$$m = \pm \frac{b}{a}, \quad m' = \mp \frac{b}{a}.$$

Dunque: il minimo angolo acuto α per una coppia di diametri coniugati nell'ellisse è dato dalla formola

$$(12) \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{b}{a}. \text{ (1)}$$

Si vede subito che i diametri coniugati eguali nell'ellisse sono le diagonali del rettangolo racchiuso dalle tangenti nei quattro vertici dell'ellisse, ed il minimo angolo θ per una coppia di diametri coniugati è quindi quello α compreso fra queste diagonali.

---

(1) Questa si ricava anche dalla (11) facendosi $d = d'$, $\theta = \alpha$ ond $d^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$ e perciò

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \cos\alpha = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

da cui la formola del testo.

§ 128.

Proprietà assintotiche nell'iperbola

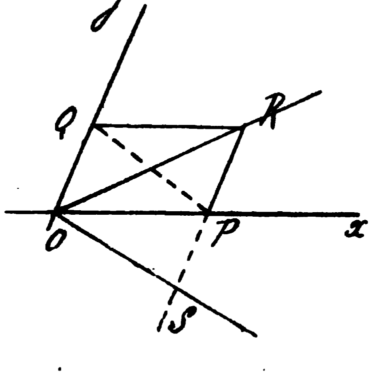
Vogliamo ora a considerare alcune proprietà metriche dell'iperbola che, dipendendo dalla realtà degli assintoti, non hanno riscontro nell'ellisse.

a). Riferiamo l'iperbola a due diametri coniugati qualunque come ad assi cartesiani coordinati. L'equazione della curva avrà la forma (§115):

$$(13) \qquad \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

dove p, q saranno le lunghezze dei semidiametri coniugati OP, OQ. L'equazione complessiva degli assintoti è (§124)

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0,$$



indi le loro equazioni separate

$$y = \frac{q}{p}x, \quad y = -\frac{q}{p}x.$$

Se sopra OP, OQ compiamo il parallelogrammo $OPRQ$,

le coordinate di R sono (p,q) quelle di P,Q rispettivamente $(p,0)$, $(0,q)$; dunque i coefficienti angolari delle diagonali OR, PQ sono $\frac{q}{p}, \frac{-q}{p}$ e coincidono con quelli degli assintoti. Dunque: Se sopra due semidiametri coniugati di un'iperbola si costruisce il parallelogramma, la diagonale uscente dal centro è un assintoto e l'altra diagonale è parallela al secondo assintoto.

Di qui risulta una semplice costruzione per tracciare gli assintoti, dati due semidiametri coniugati in grandezza e posizione. Si noti che se i due semidiametri coniugati sono uguali in lunghezza, gli assintoti sono perpendicolari e l'iperbola è equilatera (§126).

La retta PR è la tangente in P alla iperbola e, per quanto si è visto ora, essa è incontrata dal secondo assintoto in un punto, S distante da P come il punto d'incontro R col primo assintoto. Dunque: Sopra ogni tangente all'iperbola gli assintoti staccano un segmento diviso per metà dal punto di contatto.

Questo teorema segue del resto dal teorema generale secondo il quale le coppie di diametri coniugati formano un'involuzione che ha

per raggi doppî gli assintoti, onde segue che: <u>qualunque coppia di diametri coniugati nell'iperbola è divisa armonicamente dagli assintoti</u>.

Il gruppo armonico di rette O(PQRS) sarà dunque tagliato dalla trasversale RS in un gruppo armonico di punti; e siccome la RS è parallela ad OQ sarà P il punto medio di RS, c. d. d.

Consideriamo ora in un'iperbola una corda qualunque AB che incontri gli assintoti in C, D e sia E il punto medio della corda AB, onde sarà OE il diametro coniugato alla corda AB. Questo diametro OE incontra in un punto P l'iperbola primitiva, ovvero la coniugata, secondo che i due estremi A, B della corda appartengono allo stesso ramo dell'iperbola o a rami diversi, in ogni caso la tangente t in P all'iperbola (o alla coniugata) è parallela alla corda AB.

Siccome t è divisa per metà dagli assintoti in P, così il punto medio del segmento CD è ancora in E, onde risulta

$$AC = BD.$$

Dunque: <u>Ogni corda dell'iperbola incontra gli assintoti in due punti equidistanti dagli estremi della corda.</u>

Di qui si trae una semplice costruzione dell'iperbola per punti, assegnati che siano gli assintoti ad un punto della curva.

b) Abbiamo già osservato, alla fine del § 115, che, assumendo come assi coordinati gli assintoti, l'equazione dell'iperbola assume la forma semplicissima

$$xy = \text{cost}^{te}.$$

Profittando dell'arbitrarietà delle direzioni positive degli assi, possiamo supporre positiva la costante del 2° membro, e scrivere

$$(14) \qquad xy = k^2.$$

Naturalmente il valore di questa costante k dipende dai semiassi a, b dell'iperbola.

Per esprimere k per a, b osserviamo che gli assi OX, OY della curva sono le bisettrici dell'angolo 2α fra gli assintoti e del suo supplemento. Le coordinate x, y riferite agli assintoti si esprimono dunque per quelle X, Y riferite agli assi colle formole (14) del § 15

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{\cos\alpha} - \frac{Y}{\operatorname{sen}\alpha}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{\cos\alpha} + \frac{Y}{\operatorname{sen}\alpha}\right).$$

La (14) si muta quindi nell'altra

$$\frac{X^2}{\cos^2\alpha} - \frac{Y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 4k^2,$$

che, dovendo combinare colla

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dà

$$a^2 = 4k^2\cos^2\alpha\,,\quad b^2 = 4k^2\operatorname{sen}^2\alpha\,,$$

indi

$$k^2 = \frac{a^2+b^2}{4}\,,$$

che dà il valore cercato per k^2 ed anche la formola già nota $tg\,\alpha = \frac{b}{a}$.

Per la forma (14) dell'equazione della curva, l'equazione della tangente in (x', y') è

$$x y' + y x' = 2k^2,$$

ossia

$$x y' + y x' = 2x'y',$$

che si scrive

$$\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1.$$

Così $2x'$, $2y'$ sono i segmenti che la tangente stacca sugli assintoti; il loro prodotto $2x' \cdot 2y'$ è costante $= 4k^2$. Dunque: <u>L'area del triangolo racchiuso dagli assintoti di un'iperbola e da una tangente variabile è costante</u>.

§ 129.

Forma della parabola – Tangente e normale

Nella forma normale

$$(15) \qquad y^2 = 2px$$

dell'equazione della parabola possiamo supporre il parametro p positivo, assumendo convenientemente la direzione positiva dell'asse delle x (asse della parabola). Dalla (15) risulta subito che i punti reali della parabola hanno tutti ascisse positive sicchè la curva è tutta nel semipiano $x > 0$. Per vederne l'andamento basta osservare la metà compresa nel primo quadrante. Essendo

$$y = \sqrt{2px}$$

ad ogni valore positivo dell'ascissa x corrisponde un valore dell'ordinata y positiva che cresce illimitatamente al crescere di x e proporzionalmente alla sua radice quadrata. Il primo quadrante della parabola esce quindi dal vertice O (origine) normalmente all'asse e per ordinate sempre crescenti va allontanandosi all'infinito. Ribaltando questo quadrante attorno all'asse Ox si ottiene l'altro che si raccorda al primo in O e forma con

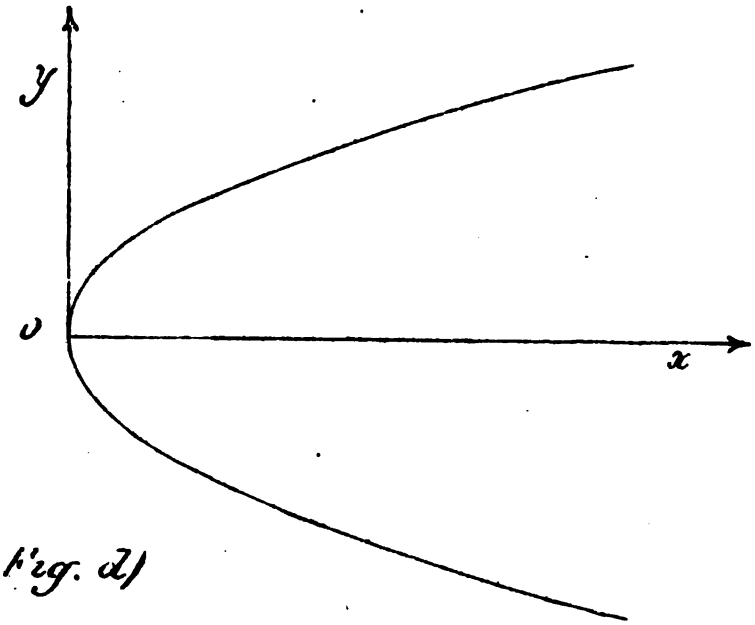


Fig. 21

esso un unico ramo costituente tutta la parabola (v. figura).
Consideriamo ora un punto qualunque $x'y'$ della parabola ed in esso la tangente, che avrà per equazione, secondo la (7) § 110:

$$(16) \qquad yy' = p(x + x').$$

La distanza del vertice della tangente è data da

$$\delta = \frac{px'}{\sqrt{y'^2 + p^2}} = \frac{\sqrt{p} \cdot x'}{\sqrt{p + 2x'}}.$$

Facendo crescere x', cioè allontanando il punto del contatto dal vertice, δ va sempre ed illimitatamente crescendo e la tangente si allontana a distanza infinita (convergendo verso l'assintoto).

Cerchiamo il punto T ove la tangente

incontra l'asse. Ponendo nella (16) perciò $y=0$ viene $x=-x'$ cioè: il punto d'incontro della tangente alla parabola coll'asse dista dal vertice come il piede dell'ordinata del punto di contatto.

Di qui, definita la parabola per mezzo dell'asse Vx, del vertice V e di un suo punto M, si traccia la tangente in M colla costruzione seguente. Calata dal M la perpendicolare MP sull'asse si riporta dall'altra parte del vertice la lunghezza $VT=VP$ e la MT è la tangente richiesta.

Consideriamo ora la normale in $(x';y')$ alla parabola. Il coefficiente angolare m sarà l'inversa negativa di quello della tangente; ma questo dalla (16) è $=\frac{p}{y'}$; dunque

$$m=-\frac{y'}{p},$$

e l'equazione della normale è perciò

$$(17)\qquad y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x').$$

Cerchiamo il punto N ove la normale incontra l'asse, indicando con ξ l'ascissa di N e ponendo nella (17) $x=\xi$ $y=0$ ne deduciamo, di-

videndo per y'(1)

$$\xi - x' = p.$$

La differenza $\xi - x'$ è il valore (algebrico) del segmento PN di asse compreso fra il piede P dell'ordinata del punto di contatto e il punto N d'incontro colla normale. Questo segmento PN dicesi la sottonormale relativa al punto M, onde si ha il teorema:

Nella parabola la sottotangente (relativa all'asse) è costante ed uguale al parametro p.(2)

---

(1) Naturalmente supponiamo $y' \neq 0$ perchè altrimenti il punto (x', y') sarebbe nel vertice e la normale coincidendo coll'asse il punto N sarebbe allora indeterminato.

(2) Questa proprietà, come si dimostra col calcolo infinitesimale, è caratteristica della parabola.

Capitolo 12°

Fuochi e proprietà focali nelle coniche

§ 130. Definizione dei fuochi

Le proprietà metriche più interessanti delle coniche si collegano alla esistenza nel piano della conica di certi punti speciali, detti fuochi, che definiamo nel modo seguente.
Attorno ad ogni punto P del piano abbiamo, rispetto alla conica, la involuzione delle rette coniugate (§ 104), nella quale in generale esiste una ed una sola coppia ortogonale (sempre reale) di raggi; altrimenti tutte le coppie sono ortogonali (§ 75) ed in quest'ultimo caso appunto si dirà che il punto P è un fuoco. Così: Un fuoco è un punto nel piano della conica, attorno al quale l'involuzione delle rette coniugate è composta di coppie tutte ortogonali.

Se F è un tal punto, i raggi doppi della involuzione sono (§ 75) le rette che congiun-

sono F ai due punti ciclici: dunque le tangenti tirate da un fuoco F alla conica sono le rette che vanno ai punti ciclici; ed inversamente, se le tangenti per F alla conica sono le rette cicliche, F è un fuoco. Per le coniche a centro (escluso il cerchio) i punti ciclici $c, \bar{c}$ non sono sulla curva e la retta $c\bar{c}$ (retta all'infinito) non tocca la conica. Partono dunque da c due tangenti distinte t, t' alla conica e da $\bar{c}$ le due tangenti immaginarie coniugate di t, t' siano $\bar{t}, \bar{t}'$ (1) i vertici del quadrilatero completo $(t, t', \bar{t}, \bar{t}')$ oltre $c, \bar{c}$ sono i fuochi. Di questi i due $(t, \bar{t})(t', \bar{t}')$ sono reali come punti d'incontro di rette coniugate (2), gli altri due immagi.

(1) Si ricordi che noi parliamo sempre di una conica (reale od immaginaria) la cui equazione sia a coefficienti reali.

(2) Una retta immaginaria

$$(a_1 + i a_2)x + (b_1 + i b_2)y + c_1 + i c_2 = 0$$

e la sua coniugata

$$(a_1 - i a_2)x + (b_1 - i b_2)y + c_1 - i c_2 = 0$$

hanno a comune il punto d'incontro delle due rette reali

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

narii coniugati). Se però la conica è un cerchio essa passa per c, c̄ ed abbiamo una sola tangente in c e la coniugata in c̄, queste due tangenti sono gli assintoti del cerchio e si incontrano nel centro che è dunque l'unico fuoco. Vediamo dunque geometricamente che: Una conica a centro possiede quattro fuochi, due reali e due immaginarii (coniugati); però nel caso del cerchio vi è un solo fuoco, il centro).

Se la curva è una parabola, la retta c c̄ tocca la curva e le altre due tangenti (coniugate) uscenti da c, c̄ rispettivamente s'incontrano nell'unico fuoco reale (a distanza finita) della curva.

Del resto il punto all'infinito della curva (centro) risponde ancora alla seconda definizione di fuoco e può dirsi il fuoco all'infinito della parabola).

Si osservi poi che se F è un fuoco ed O il centro, il diametro OF deve essere coniugato alla perpendicolare in F al diametro stesso, che è dunque un asse. Così: i fuochi giacciono sugli assi della conica).

Andiamo ora a confermare analiticamente queste deduzioni geometriche ed a

trovare effettivamente i fuochi.

Per ciò cominciamo dal risolvere la questione seguente: <u>a quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti dell'equazione di una conica affinchè l'origine sia un fuoco, supposti gli assi ortogonali?</u>

Siano m, m' i coefficienti angolari di due rette coniugate per l'origine, le cui equazioni saranno dunque

$$mx - y = 0 \quad , \quad m'x - y = 0.$$

Queste due rette hanno le rispettive coordinate omogenee

$$\xi_1 = m, \ , \xi_2 = -1 \ , \xi_3 = 0$$
$$\eta_1 = m', \eta_2 = -1 \ , \eta_3 = 0$$

e la condizione (V^*) § 104 affinchè siano coniugate assume, nei coefficienti angolari m, m', la forma

$$(1) \qquad A_{11} m m' - A_{12} (m + m') + A_{22} = 0.$$

Se l'origine è un fuoco, questa deve ridursi alla condizione d'ortogonalità $mm' = -1$, onde la risposta alla questione formulata è la seguente:

<u>Affinchè l'origine sia un fuoco è necessario e sufficiente che i coefficienti dell'equazione della conica soddisfino le due relazioni (quadratiche)</u>

$$(I) \qquad A_{12} = 0 \quad , \quad A_{11} = A_{22}.$$

Di qui possono nuovamente trarsi le conclusioni dedotte sopra geometricamente. Invero i coefficienti angolari delle tangenti tirate per l'origine sono le radici della equazione di 2° grado

$$A_{11}m^2 - 2A_{12}m + A_{22} = 0,$$

la quale soddisfatte le condizioni (I), si riduce a $m^2+1=0$; dunque le tangenti sono le rette cicliche di coefficienti angolari $\pm i$.

§ 131.

Determinazione dei fuochi

Consideriamo un'ellisse od un'iperbola di equazione normale

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e cerchiamo di determinare le coordinate incognite (x', y') di un fuoco, servendoci delle (I). Se trasportiamo, con una traslazione degli assi, l'origine nel supposto fuoco (x', y') colle formole

$$x = X + x' \quad , \quad y = Y + y'$$

l'equazione della curva diventa

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} + \frac{2x'}{a^2}X \pm \frac{2y'}{b^2}Y + \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

coi valori seguenti dei coefficienti:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \pm\frac{1}{b^2}, \quad a_{13} = \frac{x'}{a^2}, \quad a_{23} = \pm\frac{y'}{b^2}$$

$$a_{33} = \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} - 1,$$

ed è quindi

$$(d) \quad \begin{cases} A_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2 = \pm\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{x'^2}{a^2} - 1\right) \\ A_{22} = a_{11}\,a_{33} - a_{13}^2 = \dfrac{1}{a^2}\left(\pm\dfrac{y'^2}{b^2} - 1\right) \\ A_{12} = a_{13}\,a_{23} - a_{12}\,a_{33} = \pm\dfrac{x'y'}{a^2 b^2}. \end{cases}$$

Perchè la nuova origine (x', y') sia fuoco è necessario e basta che siano soddisfatte le condizioni (I), cioè le due equazioni

$$x'y' = 0, \qquad x'^2 - y'^2 = a^2 \mp b^2.$$

La prima ci dice che un fuoco deve essere sull'uno o sull'altro asse, e facendo successivamente nella seconda $y' = 0$ o $x' = 0$, troviamo sull'asse principale $y = 0$ i due fuochi reali di ascissa

$$x = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2} \text{ (1)}$$

e sull'asse secondario $x = 0$ i due fuochi coniugati im-

---

(1) Si rammenti che nel caso dell'ellisse si suppone $a > b$.

maginarii

$$y = \pm i\sqrt{a^2 \mp b^2}\ ^{(1)}$$

Questi risultati sono in perfetto accordo con quelli che abbiamo prima dedotto geometricamente; e, limitandoci ai fuochi reali, abbiamo dunque: L'ellisse e l'iperbola posseggono due fuochi situati sull'asse principale, simmetrici rispetto al centro, e distanti da questo di $\sqrt{a^2-b^2}$ per l'ellisse, di $\sqrt{a^2+b^2}$ per l'iperbola, indicando a, b i semiassi.

Definita quindi l'ellisse o l'iperbola per mezzo degli assi $A'A$, $B'B$, principale e secondario, troviamo i fuochi colla costruzione seguente. Per l'ellisse, col centro in B e con raggio $=a$ descriviamo il cerchio; questo incontra l'asse $A'A$ nei due fuochi F, F'. Per l'iperbola compiamo il rettangolo

---

(1) Procedendo nel medesimo modo per l'ellisse immaginaria

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

(suppostovi $a > b$), si trova che essa possiede i due fuochi reali

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{a^2-b^2}$$

e i due immaginari

$$x = \pm i\sqrt{a^2-b^2}, \quad y = 0.$$

OACB (di cui la diagonale OC è un assintoto); il cerchio col centro in O e di raggio OC taglia l'asse A'A nei due fuochi F, F'.

In una conica a centro dicesi eccentricità il numero che dà il rapporto della distanza focale F'F alla lunghezza dell'asse principale A'A. Questo numero, che si indica con e ha per l'ellisse il valore

$$(2) \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

per l'iperbola invece

$$(2^*) \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Nell'ellisse l'eccentricità e è compresa fra 0 e 1, l'eccentricità nulla corrispondendo al caso del cerchio. Nell'iperbola l'eccentricità è sempre > 1, ed il suo valore è legato al semiangolo α degli assintoti dalla formola

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{e}.$$

Quanto più l'eccentricità è vicina ad 1 (in ambedue le coniche) tanto più piccolo è il semiasse secondario in confronto del principale a, onde e prendesi come misura dello schiacciamento della curva.

Venendo ora a determinare i fuochi nella parabola col medesimo metodo, partiamo dall'equazione normale

$$y^2 = 2px,$$

e supponiamo che siano (x', y') le coordinate di un fuoco. Trasportandovi l'origine, l'equazione diventa

$$Y^2 + 2y'Y - 2pX + y'^2 - 2px' = 0,$$

con

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{13} = -p,\ a_{23} = y'$$
$$a_{33} = y'^2 - 2px',$$

indi

(β) $A_{11} = -2px', \quad A_{22} = -p^2, \quad A_{12} = -py'.$

Le coordinate del fuoco debbono perciò soddisfare le condizioni

$$py' = 0, \quad 2px' = p^2;$$

da cui

$$y' = 0, \quad x' = \frac{p}{2}.$$

Dunque: *La parabola possiede un unico fuoco situato sull'asse, dalla parte positiva di questo, e distante dal vertice V della metà del parametro p, ossia della metà della sottonormale, costante nella parabola* (§129).

§ 132.

Proprietà angolari relative ai fuochi.

Data una conica, ad una retta qualunque r del piano ne corrisponde una ed una sola r' coniugata di r e perpendicolare a r, la perpendicolare abbassata sopra r dal suo polo.

Consideriamo tutte le coppie di punti P, P' d'intersezione di tali coppie di rette coll'asse principale della conica, e siano α, β le rispettive ascisse di P, P' ed m, $m' = -\frac{1}{m}$ i coefficienti angolari di r, r'. Supponiamo dapprima che si tratti di un'ellisse o d'un'iperbola di equazione normale

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essendo

$$y = m(x-\alpha) \quad , \quad y = -\frac{1}{m}(x-\beta)$$

le rispettive equazioni di r, r' saranno

$$(5) \qquad \xi_1 = m, \quad \xi_2 = -1 \quad , \quad \xi_3 = -m\alpha$$

le coordinate di r e

$$(5^*) \qquad \eta_1 = -\frac{1}{m}, \quad \eta_2 = -1, \quad \eta_3 = \frac{\beta}{m}$$

quelle di r'. Ma, poichè le due rette r, r' sono coniugate, dovrà essere soddisfatta la condizione (22) §104. Ora per la forma (4) dell'equazione della conica abbiamo

$$A_{11} = \mp \frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2}, \quad A_{33} = \pm \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0,$$

onde la citata equazione (22) diventa, per i valori (5), (5*) delle ξ, η

$$\pm \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \mp \frac{\alpha\beta}{a^2 b^2} = 0,$$

ossia

$$(6) \qquad \alpha\beta = a^2 \mp b^2.$$

Questo ci dimostra che i due punti P, P' generano sull'asse focale (principale) un'involuzione di cui i punti doppi sono i fuochi F, F'; dunque: <u>Le infinite coppie di rette coniugate rispetto alla conica ed ortogonali fra loro segnano sull'asse principale le coppie di un'involuzione, che ha per punti doppi i fuochi</u>.

Per un punto arbitrario M del piano passa una ed una sola coppia di tali rette r, r' coniugate ed ortogonali, che diremo le <u>direzioni</u>

principali relative al punto M. Ora queste due rette dividono armonicamente i due raggi focali MF, MF' onde, essendo perpendicolari fra loro, saranno le bisettrici interna ed esterna dell'angolo FMF' dei raggi focali FM, F'M.

Adunque: Le direzioni principali relative ad un punto qualunque M del piano, rispetto alla conica a centro, sono le bisettrici interna ed esterna dell'angolo FMF' dei raggi focali.

In particolare se il punto M è sulla conica, le direzioni principali corrispondenti sono evidentemente la tangente e la normale nel punto e per ciò: La tangente e la normale in un punto di una conica a centro bisecano l'angolo dei raggi focali.

Si osservi poi che siccome ogni punto della tangente, in particolare quello ove incontra l'asse, è esterno alla curva, questo punto sarà nel caso dell'ellisse esterno al segmento focale FF', nell'iperbola interno e quindi: Nell'ellisse la tangente biseca l'angolo esterno dei due raggi focali, nell'iperbola l'angolo interno.

Segue di qui che un fascio di raggi luminosi e calorifici emananti da un fuoco S della ellisse, riflessi dalla curva, si incontra

no nell'altro fuoco. Da questa proprietà fisica ha avuto origine il nome di fuochi (Kepler).

Facendo ora la ricerca analoga per la parabola

$$y^2 = 2px,$$

avremo soltanto da modificare i valori delle A_{ik} che sono qui

$$A_{22} = -p^2, \quad A_{13} = p, \quad A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0$$

onde la relazione fra α, β diventa semplicemente

$$\alpha + \beta = p.$$

Anche qui dunque i punti P, P' descrivono un'involuzione e le coppie sono semplicemente simmetriche rispetto al fuoco F che è un punto doppio, l'altro essendo a distanza finita. Così: Le coppie di rette coniugate ed ortogonali rispetto alla parabola segano l'asse in punti simmetrici rispetto al fuoco.

Le direzioni principali relative ad un punto qualunque M per la parabola dividono armonicamente il raggio focale MF e la retta condotta per M parallelamente all'asse; in particolare: La tangente nella parabola è la bisettrice dell'angolo formato dal raggio focale MF colla direzione (negativa) dell'asse.

Ne segue che un fascio di raggi emanati dal fuoco riflessi sulla parabola diventano paralleli all'asse (proprietà che si utilizza nei riflettori parabolici)

"§ 133"

Proprietà delle distanze focali - Direttrici

Calcoliamo ora la distanza ρ di un punto mobile sulla conica da un fuoco. Cominciando dalle coniche a centro

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le coordinate dei due fuochi F, F' sono

$$F \equiv (ac, 0), \quad F' \equiv (-ac, 0),$$

dove per le (2), (2*)

$$(7) \qquad a^2c^2 = a^2 \mp b^2.$$

Se $M \equiv (x', y')$ è un punto della conica, quindi

$$(8) \qquad \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

indicando con ρ, ρ' le rispettive distanze (assolute) di M da F, F' abbiamo

$$\rho^2=(x'-ae)^2+y'^2,\quad \rho'^2=(x'+ae)^2+y'^2,$$

e ponendovi per y'^2 il valore

$$y'^2=\pm b^2\mp\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

ne deduciamo

$$\rho^2=\left(1\mp\frac{b^2}{a^2}\right)x'^2-2aex'+a^2e^2\pm b^2$$

$$\rho'^2=\left(1\mp\frac{b^2}{a^2}\right)x'^2+2aex'+a^2e^2\pm b^2,$$

ossia per la (7)

(9) $\rho^2=(a-ex')^2,\quad \rho'^2=(a+ex')^2.$

Distinguiamo ora secondo che si tratta di un'ellisse o di un'iperbola. Nel primo caso essendo

$$|x'|\leq a,\quad e<1,$$

si ha

$$|ex'|<a,$$

e per ciò i binomii $a-ex'$, $a+ex'$ sono in ogni caso positivi. Estraendo dunque nelle (9) le radici quadrate, abbiamo

(10) $\rho=a-ex',\quad \rho'=a+ex'$ per l'ellisse.

Nel caso dell'iperbola supponiamo, per fissare le idee, che il punto M' sia sul ramo appartenente al fuoco F'; cioè che sia $x'>0$. Il binomio $a+ex'$ è certamente positivo; l'altro $a-ex'$

è invece negativo perchè $x'>a$, $e>1$. Estraendo dunque le radici quadrate nelle (9) si ha

(10) $\rho = ex'-a, \quad \rho' = ex'+a$ (per l'iperbola, ramo del fuoco F).

Dalle (10), (10*) deducesi

$$\rho+\rho' = 2a \quad \text{per l'ellisse}$$

$$\rho'-\rho = 2a \quad \text{per l'iperbola},$$

onde il teorema A) Nell' ellisse è costante la somma, nell' iperbola la differenza dei due raggi focali di un punto sulla curva, ed è uguale all' asse principale.

Viceversa le curve che hanno costante la somma o la differenza delle distanze di un loro punto mobile da due punti fissi nel piano sono rispettivamente che l'ellisse ovvero un' iperbola coi due fuochi nei punti fissi (cf §20).

La formola (10) o (10*)

$$\rho = a - ex' \quad o \quad \rho = ex' - a$$

è suscettibile di un'altra importante interpretazione geometrica. La retta d'equazione

$$ex = a$$

non è altro che la retta polare del fuoco F e dicesi la corrispondente direttrice.

Ora se indichiamo con δ la distanza (assoluta) del punto (x', y') da questa retta abbia

mo

$$\delta = \frac{a-ex'}{e} \quad o \quad \delta = \frac{ex'-a}{e}$$

e perciò in ogni caso $\frac{\rho}{\delta} = e$. Si ha dunque il teorema:

B) Il rapporto delle distanze di un punto mobile sopra una conica a centro da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è costante ed uguale all'eccentricità e.

Per trovare la proprietà corrispondente per la parabola, calcoliamo anche qui la distanza ρ di un punto (x', y') della curva $y^2 = 2px$ dal fuoco $F \equiv \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Abbiamo

$$\rho^2 = \left(x' - \frac{p}{2}\right)^2 + y'^2 = x'^2 - px' + \frac{p^2}{4} + 2px',$$

ossia

$$\rho^2 = \left(x' + \frac{p}{2}\right)^2$$

e quindi

$$(11) \qquad \rho = x' + \frac{p}{2}.$$

D'altra parte la polare di un punto qualunque (x_1, y_1) rispetto alla parabola ha l'e=

quazione

$$yy' = p(x+x_1),$$

indi la direttrice (polare del fuoco) ha per e-quazione

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

e per ciò il secondo membro della (11) è il valore della distanza δ di $(x; y')$ dalla direttrice: Dunque: <u>Nella parabola ogni punto è equidistante dal fuoco F e dalla direttrice d.</u> Come si vede, questa proprietà corrisponde a quella del teorema B) per le coniche a centro, quando si faccia l'eccentricità $e = 1$. Di qui resulta già che la parabola può riguardarsi come una forma limite dell'ellisse o dell'iperbola quando l'eccentricità tende al valore limite 1, della qual cosa daremo più avanti una spiegazione diretta (V. § 135).

La proprietà espressa del teorema B) è caratteristica per le coniche, cioè sussiste il teorema: <u>Il luogo di un punto del piano pel quale sia costante $= e$ il rapporto delle distanze del punto da un punto fisso F e da una retta fissa d è una conica di cui F è un fuoco, d la corrispondente direttrice; la conica stessa è un'ellis-</u>

se, un'iperbola od una parabola secondo che $e<1$, $e>1$ od $e=1$.

Prendosi infatti il punto F per origine di un sistema cartesiano ortogonale di cui l'asse x sia la perpendicolare calata da F su d, indi l'asse delle y parallelo a d. Sarà

$$x=c$$

l'equazione della retta d e le distanze ρ, δ di un punto (x,y) da F, d rispettivamente, saranno date da

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \delta=\pm(x-c)$$

Il luogo cercato ha dunque per equazione

$$x^2+y^2=e^2(x-c)^2$$

ossia

$$(12) \qquad (1-e^2)x^2+y^2+2e^2cx-e^2c^2=0.$$

La curva è quindi intanto un'ellisse se $e<1$ un'iperbola se $e>1$ una parabola per $e=1$. Poichè inoltre nella (12)

$$a_{11}=1-e^2, \; a_{12}=0, \; a_{22}=1, \; a_{13}=e^2c, \; a_{23}=0, \; a_{33}=e^2c,$$

ne risulta

$$A_{12}=0, \quad A_{11}=A_{22}$$

e perciò l'origine F è fuoco (§ 130). In fine l'equazione della polare dell'origine

$$a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$$

si riduce qui alla $x = c$, che è appunto l'equazione della retta $\underline{d}$, c. d. d.

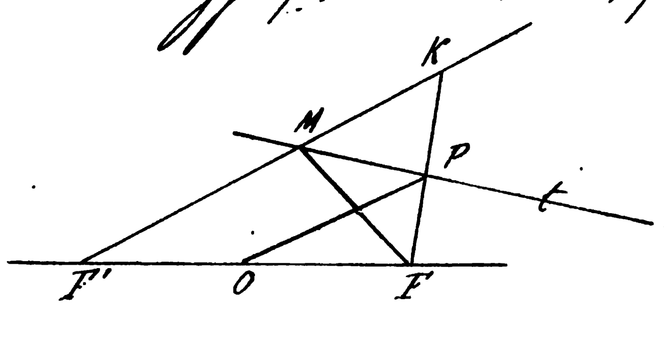
Alle proprietà ora osservate si può anche dare la forma seguente: *La curva luogo di un punto la cui distanza da un punto fisso F è una funzione lineare intera $ax+by+c$ delle coordinate del punto è una conica di cui F è un fuoco e la retta $ax+by+c=0$ la corrispondente direttrice.*

"§134"

Altre proprietà focali

Dimostrate nei due §§ precedenti le proprietà metriche fondamentali relative ai fuochi, passiamo a dedurne alcune altre per mezzo di considerazioni di geometria elementare, che è facile del resto confermare per via analitica.

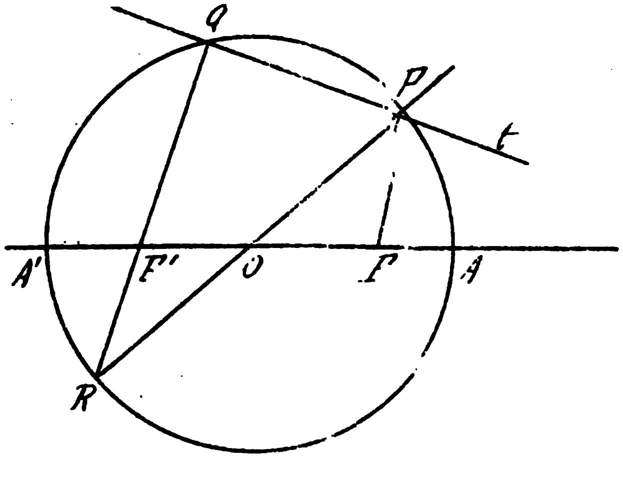
Abbiasi dapprima un'ellisse definita per mezzo dei fuochi F, F' e di un punto M della curva. Tirati i raggi focali FM, $F'M$, prolunghisi $F'M$ di un tratto $MK = MF$ e si congiunga F con K: sarà $F'K = 2a$. Abbassando da M la perpendicolare MP



sulla $F'K$, sarà la Mt la tangente t in M alla ellisse e P il piede della perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente t. Ma poichè P è il punto di mezzo di FK ed O (centro dell'ellisse) il punto di mezzo di $F'F$ sarà

$$OP = \frac{1}{2} F'K = a.$$

Dunque il piede della perpendicolare abbassata dal fuoco su qualunque tangente t all'ellisse dista dal centro di una lunghezza eguale al semiasse principale. Per l'iperbola la conclusione è perfettamente la stessa, salvo che il segmento $MK = MF$ devesi riportarsi in verso opposto. Ne concludiamo: La curva podaria (1) di una conica a centro rispetto ad un fuoco è il cerchio descritto



(1) In generale chiamasi podaria di una curva rispetto ad un punto il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal punto sulle tangenti alla curva.

<u>sull'asse principale come diametro</u>.

Si considerino ora le due perpendicolari FP, $F'Q$ abbassate dai fuochi sopra una tangente qualunque t alla conica. I due punti P, Q sono sulla circonferenza descritta sull'asse principale $A'A$ come diametro. Se prolunghiamo QF' ad incontrare nuovamente la circonferenza in R, l'angolo RQP essendo retto, i tre punti R, O, P sono in linea retta. Si vede quindi che i triangoli FPO, $F'RO$ sono eguali e quindi $FP = F'R$. Ora il prodotto $F'Q \cdot F'R$ dei segmenti in cui è divisa la corda QR del diametro AA' è eguale al prodotto $F'A \cdot F'A'$ che è costante al variare di t (1); dunque:

<u>Il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente alla conica a centro è costante ed eguale al quadrato b^2 del semiasse secondario</u>. Che sia b^2 il valore di questa costante si vede subito da ciò che per l'ellisse

$$F'A = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad F'A' = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$

per l'iperbola

---

(1) N.B. La figura superiore si riferisce al caso dell'ellisse; per l'iperbola F, F' sono esterni al segmento $A'A$ e cadono da banda opposta della tangente t.

$$F'A = \sqrt{a^2-b^2}+a, \quad F'A' = \sqrt{a^2+b^2}-a.$$

Risolviamo infine il problema: <u>Trovare il luogo dei punti del piano da cui partono tangenti ortogonali ad una conica.</u>

Trattando la questione analiticamente, ricordiamo che se l'equazione della conica è riferita ad assi ortogonali qualunque, i coefficienti angolari delle due tangenti che <u>dall'origine</u> partono alla conica sono le radici della equazione di 2° grado

$$A_{11}m^2 - 2A_{12}m + A_{22} = 0.$$

Le due tangenti sono ortogonali quando il prodotto di queste due radici è $=-1$, cioè quando

$$A_{11} + A_{22} = 0.$$

Ora se da un punto (x', y') partono tangenti ortogonali alla conica a centro

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trasportando in (x', y') l'origine degli assi con una traslazione, i valori di A_{11}, A_{22} sono dati dalle (α) §131 ed è quindi

$$A_{11} + A_{22} = \pm\frac{1}{a^2b^2}\left(x'^2 + y'^2 - a^2 \mp b^2\right),$$

onde la condizione $A_{11}+A_{22}=0$ equivale a

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \pm b^2.$$

Dunque: In una conica a centro il luogo dei punti da cui partono tangenti ortogonali è la circonferenza col centro nel centro della conica e di raggio $= \sqrt{a^2+b^2}$ nell'ellisse, di raggio $\sqrt{a^2-b^2}$ nell'iperbola.

Come si vede, nell'iperbola questo luogo, è reale solo quando $b < a$, cioè quando i due rami dell'iperbola stanno nell'angolo acuto degli asintoti.

Lo stesso processo applicato alla parabola, coll'osservare le (β) §131 dà il teorema:

Il luogo dei punti da cui partono due tangenti ortogonali alla parabola è la direttrice.

§135.

Parabola come forma limite dell'ellisse o dell'iperbola.

Di una conica a centro teniamo fisso un vertice estremità dell'asse primario ed il prossimo fuoco e facciamo allontanare l'altro fuoco (od anche il centro, o l'altro vertice) a distanza finita. Dimostriamo che la forma della conica

tenderà alla parabola come forma limite.(1)

Nella ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

trasportiamo l'origine sul vertice $(-a, 0)$ cangiando x in $x-a$ e l'equazione diventa

$$(13)\qquad y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

La distanza $\underline{m}$ del fuoco dal prossimo vertice è

$$m=a-\sqrt{a^2-b^2}$$

e questa rimane costante. Ne risulta

$$a^2-b^2=(a-m)^2$$

ossia

$$b^2=2ma-m^2.$$

Facciamo ora crescere $\underline{a}$ all'infinito (e quindi $\underline{b}$); abbiamo

$$\lim\frac{b^2}{a}=2m,\quad \lim\frac{b^2}{a^2}=0,$$

e l'equazione (13) della curva tende verso l'equa=

---

(1) Nel caso della iperbola insieme col secondo fuoco si allontana anche a distanza finita il secondo ramo ed il primo converge verso la parabola.

zione limite

$$y^2 = 4mx$$

che è quella di una parabola di parametro $p = 2m$, che ha quindi il vertice ed il fuoco sul vertice e nel fuoco fissi. Pel caso dell'iperbola la dimostrazione è del tutto analoga.

Si osservi che l'eccentricità

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

dell'ellisse converge verso 1 quando l'ellisse converge verso la forma parabolica. Così tutte le proprietà metriche della parabola possono dedursi da quelle dell'ellisse (o dell'iperbola) con passaggio al limite.

Osserviamone qualcuna. Il circolo descritto sull'asse principale della conica a centro si cangia, al limite, nella tangente al vertice alla parabola e quindi: <u>la podaria del fuoco nella parabola è la tangente al vertice</u>, teorema che è facile stabilire direttamente con considerazioni geometriche elementari come quelle del § prec.

Ancora il cerchio $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ incontra l'ellisse, al di là del vertice fisso, in un punto distante da questo di

$$\sqrt{a^2+b^2}-a=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+1},$$

che al limite diventa

$$\frac{1}{2}\lim\frac{b^2}{a}=m=\frac{p}{2}.$$

Il centro del cerchio si trasporta all'infinito ed il circolo tende verso la direttrice. L'ultimo teorema del § precedente si cangia quindi nel corrispondente per la parabola.

§ 136.
Equazione polare di una conica riferita al fuoco.

Veniamo ora a dare l'equazione polare di una conica, di qualunque delle tre specie, quando si assuma come polo un fuoco e come asse polare l'asse focale diretto dal fuoco al prossimo vertice.

1° Per l'ellisse la distanza ρ di un punto (x, y) dal fuoco $F\equiv(ac, 0)$ è data, per la prima delle (10) § 133 da

$$\rho=a-ex.$$

Se si trasporta, con una traslazione, l'origine nel fuoco $F \equiv (ae, 0)$ si ha

$$x = X + ae$$

e d'altra parte, in coordinate polari:

$$X = \rho \cos\theta \,;$$

dunque:

$$\rho = a(1-e^2) - e\rho\cos\theta$$

e quindi per l'equazione in coordinate polari

$$(a) \qquad \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

2°. Per l'iperbola si ha dalla prima delle (10*)

$$\rho = ex - a$$

e procedendo come sopra

$$\rho = a(e^2-1) + e\rho\cos\theta \,.$$

Ma la direzione positiva dell'asse delle x essendo qui opposto a quello dell'asse polare, conviene aumentare in questa formola θ di π, e risulta quindi

$$(b) \qquad \rho = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} \text{ (1)} \,.$$

---

(1) Si osservi che l'equazione in coordinate polari (b) rappresenta ancora l'iperbola completa cioè l'uno e l'altro ramo, il primo per quei valori di θ che rendono $|1+e\cos\theta| > 0$ cioè $\rho > 0$, il se-

Per la parabola dalla (11)

$$\rho = x + \frac{p}{2},$$

e trasportando l'origine nel fuoco

$$x = X + \frac{p}{2},$$

ed osservando che anche qui l'asse polare ha direzione contraria a quello dell'asse della parabola, dobbiamo fare

$$X = -\rho \cos\theta$$

e perciò

$$(c) \qquad \rho = \frac{p}{1+\cos\theta}.$$

Nelle formole (a), (b), (c) i numeratori

$$a(1-e^2), \quad a(e^2-1), p$$

hanno sempre il significato dell'<u>ordinata del fuoco</u>, come si vede facendovi $\theta = \frac{\pi}{2}$; questo valore dicesi il <u>parametro</u> della curva e si indica con p.

Così: <u>l'equazione polare della conica</u>

---

cendo quindi $|1+e\,\text{sen}\,\theta| < 0$, cioè $\rho < 0$. Come si vede, è qui necessario dare alle coordinate polari il loro significato generale (cf § 17).

assume la forma comune per le tre specie

$$(14) \qquad \rho = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

e solo il valore del numero e (eccentricità) distingue l'ellisse $e<1$ dall'iperbola $e>1$, e infine dalla parabola $e=1$.

Questa forma (14) dell'equazione delle coniche è importante specialmente in ricerche di meccanica celeste.

§137.

Coniche confocali - Coordinate ellittiche.

Dati due punti fissi F, F' sul piano, vi sono infinite ellissi ed infinite iperbole che hanno i fuochi in quei due punti. Per ogni punto M del piano passa una curva del 1° sistema (ellisse) ed una curva del 2° sistema (iperbola) ed ivi le due curve si tagliano ad angolo retto, perchè la tangente all'ellisse biseca l'angolo esterno, la tangente all'iperbola l'angolo interno F'MF

dei raggi focali (§132)[1]. Questo doppio sistema ortogonale di curve ricopre dunque il piano in guisa che in ogni punto del piano si incrociano una curva del 1° ed una curva del 2° sistema; esso dicesi il sistema delle ellisse ed iperbole confocali od omofocali. Tutte le curve del sistema hanno a comune le tangenti che dai fuochi fanno alle curve, le rette cicliche; esse costituiscono una schiera di coniche inscritte nel quadrilatero formato da quelle quattro rette.

Secondo quanto abbiamo detto in generale al §19 sul concetto di coordinate curvilinee nel piano, possiamo assumere il doppio sistema di ellissi ed iperbole confocali nel piano come linee coordinate. Indicando con u, v i respettivi semiassi primarii dell'ellisse e dell'iperbola del sistema confocale che passano per un punto $M=(x,y)$ del piano, potremo assumere u, v come coordinate del punto M; esse dicansi le coordinate ellittiche del punto e sono legate

---

(1) Si può anche dire: Le due direzioni principali relative ad un punto qualunque M del piano di una conica (§132) sono le tangenti alle due coniche del sistema confocale che passano per M.

alle bipolari ρ, ρ' (§ 19) dalle formole

$$u = \rho + \rho', \quad v = \rho - \rho'.$$

Proponiamoci di esprimere le coordinate cartesiane (x, y) per le ellittiche (u, v) ed inversamente. Se con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

indichiamo una particolare ellisse del sistema, si vede subito che l'equazione di ogni altra conica del sistema confocale sarà data dalla

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

dove λ è un parametro variabile. Le ellissi del sistema corrispondono ai valori di λ nell'intervallo $(-b^2 \ldots +\infty)$, le iperbole ai quelli nell'intervallo $(-a^2 \ldots -b^2)$, mentre ai valori di $\lambda < -a^2$ corrispondono ellissi immaginarie. Fissato un punto (x, y) del piano i valori di λ per le coniche del sistema (15) che vi passano sono le radici della equazione di 2° grado

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) - (b^2+\lambda)x^2 - (a^2+\lambda)y^2 = 0,$$

e si vede anche subito algebricamente che una di esse giace fra $-b^2$ e $+\infty$, l'altra fra $-a^2$ e $-b^2$. Indicando la prima con λ_1, la seconda con λ_2, e ponendo

$$u^2 = a^2 + \lambda_1, \quad v^2 = -(b^2 + \lambda_2),$$

saranno u, v i rispettivi semiassi primarii dell'ellisse e dell'iperbola che passano per $M \equi (x, y)$ cioè le coordinate ellittiche di M.

Ora poichè si ha l'identità

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) - (b^2+\lambda)x^2 - (a^2+\lambda)y^2 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

ponendo in questa prima $\lambda = -a^2$, poi $\lambda = -b^2$, ne deduciamo

$$(a^2-b^2)x^2 = (a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2) = u^2(a^2-b^2-v^2)$$

$$(a^2-b^2)y^2 = -(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2) = v^2(u^2-(a^2-b^2)).$$

Ponendo per brevità $c = \sqrt{a^2-b^2}$, le formole

$$(16) \qquad x^2 = \frac{u^2(c^2-v^2)}{c^2}, \quad y^2 = \frac{v^2(u^2-c^2)}{c^2}$$

daranno le coordinate cartesiane x, y espresse per l'ellittiche u, v. Si osservi poi che u varia fra $\underline{c}$ e $+\infty$ e $\underline{v}$ fra $\underline{0}$ e $\underline{c}$. Se consideriamo i valori estremi $u = c$, $v = 0$ vediamo che al primo corrisponde il tratto dell'asse $\underline{x}$ fra i due fuochi che è da riguardarsi, contato due volte come l'ellisse (del sistema infinitamente schiacciata; ed al valore $v = 0$ corrisponde l'asse delle y, contato due volte, a cui si riduce l'iperbola).

Completiamo queste nozioni sul=

le coordinate ellittiche, supponendo di allontanare all'infinito uno dei fuochi p. e. F'; allora il sistema si riduce a quello delle parabole aventi il fuoco comune in F e lo stesso asse. Una parabola variabile nel sistema è rappresentata dalla equazione

$$(17) \qquad y^2 = 2\lambda x + \lambda^2,$$

dove variando λ da 0 a $+\infty$ si hanno le parabole di rette in un senso e per λ a $-\infty$ parabole rivolte in senso contrario.

Per ogni punto (x, y) del piano passa una parabola del 1° ed una parabola del 2° sistema ed ivi si incrociano ad angolo retto. Esse corrispondono alle radici in λ della equazione (17) che ha appunto una radice positiva λ_1 ed una negativa λ_2. Posto

$$\lambda_1 = p, \quad \lambda_2 = -q$$

saranno p, q i valori assoluti dei parametri delle due parabole, che potranno assumersi come coordinate (paraboliche) del punto e dalla (17) seguiamo subito le formole

$$(18) \qquad x = \frac{q-p}{2}, \quad y^2 = pq$$

che esprimono le coordinate cartesiane per le paraboliche.

§ 138.

Coniche simili e similmente disposte

Termineremo questa breve esposizione della teoria analitica delle coniche con una ricerca sulle coniche simili e similmente disposte nel piano, che ci sarà utile fra breve nella teoria delle quadriche.

Supponiamo di avere due coniche d'eguale eccentricità e. Sovrapponiamo il piano dell'una al piano dell'altra, così che un fuoco dell'una cada in un fuoco dell'altra e coincidano i loro assi polari (focali). L'equazione polare (14) § 136 della conica dimostra che fra i raggi vettori ρ, ρ' delle due coniche, corrispondenti alla medesima anomalia θ, passerà un rapporto costante

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{p}{p'},$$

dove p, p' sono i loro parametri. Le due coniche saranno dunque omotetiche nel senso della geometria elementare ed il fuoco comune

sarà centro di omotetia.

In generale due figure piane si dicono simili quando con un movimento si possono collocare in posizione omotetica; vediamo dunque che: <u>Due coniche d'eguale eccentricità sono figure simili; viceversa due coniche simili hanno eguale eccentricità.</u>

Se in un medesimo piano od in piani paralleli, abbiamo due coniche simili queste diconsi inoltre <u>similmente disposte</u> se i loro assi omonimi sono paralleli (se cioè possono portarsi con una traslazione in posizione omotetica).

Ciò premesso abbiansi nel piano x, y, riferito ad un sistema di assi, le equazioni di due coniche C, C' che supporremo reali:

(19) $$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

(19*) $$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a'_{13}x+2a'_{23}y+a'_{33}=0,$$

le quali abbiano gli stessi coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22} dei termini di 2° grado (1). Le due coniche saranno intanto della medesima specie. Cominciando dal caso parabolico.

---

(1) Basterebbe anche dire coefficienti proporzionali nei termini di 2° grado, che allora si ridurrebbero subito alla forma (19), (19*) del testo.

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

le due parabole avranno i diametri e quindi gli assi paralleli, poichè il coefficiente angolare dei diametri dipende solo da a_{11}, a_{12}, a_{22}; quindi le due parabole saranno simili e similmente disposte.

Se le coniche C, C' sono a centro, prendendo per la prima assi paralleli ai primitivi uscenti dal centro e così per la seconda volta e chiamando ancora (x, y) i primi X, Y i secondi le (19), (19*) diventeranno (§ 110)

$$(20)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=0$$

$$(20^*)\qquad a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+\frac{\Delta'}{A_{33}}=0$$

indicando con Δ, Δ' i discriminanti di C, C'.

Se con una traslazione sovrapponiamo i centri delle due coniche, indi poniamo

$$(21)\qquad x=kX\ ,\quad y=kY$$

le due equazioni (20), (20*) si rendono identiche prendendo la costante k in guisa che sia

$$k^2=\frac{\Delta}{\Delta'}\ ,\quad k=\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\ .$$

Le formole (21) dimostrano allora che le due coniche sono in posizione omotetica; le pri-

nitive erano dunque simili e similmente dispo-
ste.

Ma poichè k sia reale bisogna che Δ, Δ' abbiano il medesimo segno. Ora nel caso ellittico (supposte le due ellissi reali) ciò ha sempre luogo perchè Δ, Δ' hanno il segno opposto ad a_{11} (o a_{22}) (§120).

Nel caso iperbolico se Δ, Δ' hanno il medesimo segno, le due iperbole sono simili e similmente disposte. Quando abbiano segno contrario basterà p. e. all'iperbola (23) sostituire la coniugata, cangiando Δ in $-\Delta$, e questa resulterà simile e similmente disposta alla (23*).

Concludiamo adunque: <u>Se le equazioni di due coniche reali hanno a comune i termini di 2° grado, le due coniche sono simili e similmente disposte se sono ellissi o parabole. Se sono iperbole avviene lo stesso quando i discriminanti Δ, Δ' hanno lo stesso segno; ma se hanno invece segno contrario l'una è simile e similmente disposta alla coniugata dell'altra.</u>

Parte terza

Le superficie di 2° grado

Capitolo 13°

Proprietà generali projettive delle quadriche - Teoria della polarità

§ 139.

Equazione generale di una quadrica - Quadriche riducibili

Andiamo ora ad intraprendere lo studio delle generali superficie di 2° grado, che diconsi anche brevemente quadriche. In questo primo capitolo, come già nell'analogo per le coniche (Cap. IX), volendo trattare delle proprietà generali projettive delle quadriche, faremo uso di coordinate generali projettive (omogenee). I fondamenti analitici per la trattazione sono i medesimi che per la teoria delle coniche; solo qui avrem

una variabile (condensata) di più. Le formule fondamentali riescono così del tutto simili a quelle del Cap. IX e basterà insistere soltanto sulla cangiata interpretazione geometrica.

Indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate correnti projettive ed omogenee, di un punto dello spazio, l'equazione generale di una quadrica si otterrà eguagliando a zero una forma quadratica quaternaria:

$$(1) \qquad f_{xx} = \sum_{ik}^{1.4} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0,$$

che sviluppata scriviamo:

$$(1^*)\; f_{xx} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

Potremmo supporre i coefficienti a_{ik} costanti complesse qualunque; ma noi intenderemo sempre di considerare il caso di coefficienti reali. La quadrica potrà essere del resto reale od immaginaria.

La prima ricerca che vogliamo fare (analoga alla ricerca del § 96) è quella di esaminare quali particolarità geometriche offre la quadrica se la forma quadratica f_{xx} è riducibile, ossia se è nullo il suo discriminante Δ, nel qual caso la caratteristica di Δ sarà 3, o 2 o 1.

Cominciamo dai due ultimi casi. Se

la caratteristica di Δ è $=2$, cangiando linearmente le variabili x in convenienti nuove variabili y possiamo ridurre la f_{xx} a contenere due sole di queste variabili, siano y_1, y_2 (§. 95) e la f è quindi decomponibile (§ 96) nel prodotto di due fattori lineari (reali od immaginarii). Così la f_{xx} primitiva sarà decomponibile in due fattori lineari:

$$f_{xx} = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4)$$

e la quadrica si decomporrà quindi nei due piani

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0$$

i quali saranno distinti; altrimenti la f_{xx} sarebbe riducibile ad una sola variabile e la caratteristica di Δ sarebbe quindi $=1$, ciò che appartiene all'ultimo caso. In questo appunto (pel teorema B) § 95) la f_{xx} è il quadrato di un'espressione lineare e la quadrica consta di due piani coincidenti.

Viceversa se la quadrica è degenere, cioè si scinde in una coppia di piani, la f_{xx} è riducibile a due o ad una variabile, secondo che quei due piani sono distinti o coincidenti, e la caratteristica di Δ è quindi $= 2$ ovvero $= 1$.

Esaminiamo in fine il caso che sia bensì $\Delta = 0$, ma la caratteristica di Δ sia $= 3$. Qui la

quadrica, per quanto si è visto sopra, non è certamente degenere; ma, come ora dimostriamo, essa è una superficie conica ed ha quindi un punto singolare, il vertice del cono. Essendo Δ di caratteristica 3, possiamo fare una trasformazione di variabili

$$x_i = \sum_k^{1..4} c_{ik} y_k$$

tale che la forma trasformata

$$f' = \sum_{ik}^{1..4} a'_{ik} y_i y_k$$

contenga solo y_1, y_2, y_3 e non la y_4. L'equazione della quadrica diventa perciò

$$\sum_{ik}^{1..3} a'_{ik} y_i y_k = 0$$

ed essendo soddisfatta da $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$ qualunque sia y_4, la quadrica passa intanto pel vertice $(0, 0, 0, 1)$ del tetraedro fondamentale. Ma di più, se l'equazione è soddisfatta da y'_1, y'_2, y'_3, lo è anche da ogni punto di coordinate

$$(y'_1\ y'_2\ y'_3\ y_4)$$

con qualunque y_4. Ora i punti che hanno le stesse tre prime coordinate sono sopra una retta uscente dal vertice $(0, 0, 0, 1)$; dunque la quadrica è un cono col vertice in questo punto. Viceversa è su-

bito visto, invertendo il ragionamento precedente, che se la quadrica è un cono la forma f_{xx} deve essere riducibile e quindi $\Delta = 0$.

Riepilogando questi resultati, abbiamo adunque: Quando il discriminante Δ è nullo la quadrica è un cono se Δ è di caratteristica $= 3$, una coppia di piani distinti se la caratteristica è 2, infine una coppia di piani coincidenti se la caratteristica è $= 1$.

Possiamo di più facilmente determinare il vertice del cono (punto doppio) o l'asse della coppia di piani (retta doppia) che forma il luogo. Il vertice del cono ha le nuove coordinate y_1, y_2, y_3 nulle e, secondo quanto si è visto alla fine del § 95, in esso si annullano quindi le quattro espressioni lineari

$$\sum_{k}^{1..4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ossia: Il vertice del cono è il punto di concorso dei quattro piani

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = 0 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = 0 \end{cases}$$

i quali appunto, nel caso della caratteristica 3,

appartengono ad una stella, non ad un fascio. Se la caratteristica è = 2 i quattro piani (2) appartengono ad un fascio il cui asse è la retta doppia del luogo. In fine nel caso della caratteristica 1 i piani (4) si riducono ad un unico piano che, contato due volte, dà la quadrica!

"§ 140.

Quadrica per nove punti - Punti d'incontro d'una retta con una quadrica.

L'equazione generale (1) di una quadrica contiene omogeneamente 10 coefficienti; la forma e la posizione della quadrica nello spazio dipendono quindi da nove parametri, i rapporti di questi 10 coefficienti. Le quadriche dello spazio formano dunque un'infinità del 9° ordine, ossia occorrono in generale nove condizioni geometriche per individuare una quadrica. In particolare, se assegnamo della quadrica 9 punti, avremo 9 equazioni lineari per determinare quei 9 rapporti, onde si vede: Per nove punti dello spazio, comunque

dato, passa, in generale, una ed una sola quadrica.

Eccezione si ha soltanto quando delle nove equazioni lineari considerate una almeno è una conseguenza delle altre otto; ed allora tutte le quadriche che passano per certi otto punti considerati passano anche per il nono. Due di queste quadriche $f=0$, $\varphi=0$ si tagliano lungo una curva C (del 4° ordine) per quei nove punti, ed ogni quadrica del fascio $f+\lambda\varphi=0$ passa per la curva C e per quei nove punti.

Come per le coniche, così per le quadriche le formole fondamentali della teoria si ottengono partendo dalla risoluzione del problema: Trovare i punti comuni alla quadrica (1) ed a una retta individuata da due suoi punti (x_i'), (x_i'')

Basterà per ciò ripetere i calcoli del § 99, coll'unica differenza che nelle somme attuali gli indici percorrono i valori da 1 a 4, anzichè da 1 a 3.

Posto

$$f_{x'x'}=\sum_{ik}^{1..4} a_{ik}\, x_i'\, x_k' \,,\quad f_{x''x''}=\sum_{ik}^{1..4} a_{ik}\, x_i''\, x_k''$$

$$(3) \qquad f_{x'x''} = \sum_{ik}^{1..4} a_{ik}\, x'_i x''_k ,$$

le cercate coordinate dei punti d'incontro della congiungente i punti (x'_i), (x''_i) colla quadrica saranno dati dalle formole

$$x_i = \lambda x'_i + \mu x''_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ deve essere una radice della equazione fondamentale:

$$(I) \qquad f_{x'x'} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2 f_{x'x''} \frac{\lambda}{\mu} + f_{x''x''} = 0.$$

Se questa è un'equazione propria, non un'identità, si ha dunque: la retta in considerazione incontra la quadrica in due punti che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, ovvero coniugati immaginarii.

Nel caso intermedio, quando la retta incontra la quadrica in due punti riuniti, la retta si dirà tangente alla quadrica in quel punto.

Ma può anche darsi che la (I) sia un'identità, che si abbia cioè

$$f_{x'x'} = 0 , \quad f_{x''x''} = 0$$
$$f_{x'x''} = 0,$$

ed allora tutti i punti della retta appartengono

alla quadrica; la retta giace interamente sulla quadrica e dicesi una *generatrice* della quadrica. Poichè ciò accada è necessario e basta che i due punti (x_i'), (x_i'') siano sulla quadrica ed inoltre si annulli l'espressione bilineare $f_{x'x''}$ formata colle loro coordinate, che conviene scrivere per disteso:

$$(II)\quad f_{x'x''} = (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4')x_1'' + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4')x_2'' + \\ + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4')x_3'' + (a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4')x_4''.$$

Notiamo ancora il teorema (§92):

Un piano arbitrario dello spazio sega una quadrica secondo una conica (reale od immaginaria). L'unico caso d'eccezione ha luogo quando il piano fa parte della quadrica, che degenera allora in questo piano ed in un secondo piano.

"§141"

Piano tangente

Se prendiamo sulla quadrica un punto qualsiasi $A \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$, è manifesto che potremo tirare in A infinite tangenti alla quadrica. Un piano qualunque per A sega infatti la quadrica in una conica per A e la tangente in A alla conica è, per la definizione stessa, tangente alla quadrica. Viceversa se per una tangente t alla qua-

Ora facciamo passare un piano questo sega la quadrica in una conica che ha t per tangente. Ora domandiamo: Quale luogo formano le infinite tangenti in un piano A' ad una quadrica? Dimostreremo che esse formano un piano: a questo si dà il nome di piano tangente della quadrica in A.

Essendo (y_i) un punto della quadrica, cerchiamo perciò a quale condizione dovrà soddisfare un punto (x_i) dello spazio affinchè la congiungente $(x_i)(y_i)$ tocchi in (y_i) la quadrica. I punti d'incontro di questa colla quadrica hanno le coordinate

$$\lambda x_i + \mu y_i ,$$

dove $\frac{\lambda}{\mu}$ è una radice della equazione fondamentale (I)

$$(4) \qquad f_{xx}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2 f_{xy}\frac{\lambda}{\mu} + f_{yy} = 0.$$

Essendo $f_{yy}=0$, questa ha una radice nulla corrispondente p. e. a $\lambda=0$, $\mu=1$ cioè al punto (y_i) della quadrica. Perchè la retta $(y_i)(x_i)$ incontri solo in (y_i) la quadrica, cioè sia ivi tangente, occorre e basta che anche la seconda radice della (4) sia nulla, che si abbia cioè

$$f_{xy} = f_{yx} = 0.$$

Sviluppando secondo la (II) otteniamo

$$(5)\ (a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4)x_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4)x_2+$$
$$+(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4)x_3+(a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4)x_4=0,$$

che possiamo anche scrivere

$$(5^*)\quad x_1\frac{df_{yy}}{\delta y_1}+x_2\frac{df_{yy}}{\delta y_2}+x_3\frac{df_{yy}}{\delta y_3}+x_4\frac{df_{yy}}{\delta y_4}=0.$$

Le y_i essendo fisse, questa è l'equazione di un piano; e la nostra analisi dimostra appunto che esso è il luogo di tutte le tangenti in (y_i) alla quadrica. Così è dimostrata l'esistenza del piano tangente in un punto qualsiasi (y_i) della quadrica ed è trovata la sua equazione (5).

Nel ragionamento precedente si è supposto che la (5) sia una vera equazione nelle x, non un'identità. Quest'ultimo caso d'eccezione si presenta allorquando i quattro quadrinomii

$$\sum_k^{1..4} a_{ik}\,y_k \qquad (i=1,2,3,4)$$

sono simultaneamente nulli; ma allora è nullo Δ e la quadrica è un cono col vertice in (y_i). Concludiamo: <u>In ogni punto di una quadrica vi ha sempre uno ed un solo piano tangente; fa eccezione il caso del cono quando il punto sia scelto nel vertice.</u>

È chiaro geometricamente che tutti i pia-

ni tangenti al cono passano per il vertice e ciò spiega l'eccezione, perchè ivi il piano tangente è indeterminato. Analiticamente si perviene allo stesso resultato osservando che, se si sceglie il vertice del cono p. e. per vertice $A_4 \equiv (0, 0, 0, 1)$ del tetraedro fondamentale, l'equazione del cono non contiene la x_4, e lo stesso accade quindi dell'equazione di qualunque suo piano tangente; ogni tale piano passa dunque per A_4.

§ 142. Punti ellittici, iperbolici o parabolici.

Il piano tangente alla quadrica in un suo punto A sega la quadrica, come ogni altro piano dello spazio, in una conica; ma vediamo facilmente che nel caso attuale la conica è degenere in una coppia di rette (reali od immaginarie) uscenti da A. E infatti se x_1', x_2', x_3', x_4' sono le coordinate di A, l'equazione del piano tangente in A è

$$f_{x'x} = 0 .$$

Se dunque (x_i'') è un ulteriore punto comune alla quadrica ed al piano tangente,

si ha simultaneamente

$$f_{x'x'}=0\,,\quad f_{x'x''}=0\,,\quad f_{x''x''}=0\,;$$

per ciò l'equazione fondamentale (I) si riduce ad un'identità e la congiungente $(x_i')(x_i'')$ giace per intero sulla quadrica. Dunque: <u>Ogni piano tangente sega la quadrica in due rette uscenti dal punto di contatto A.</u>

Queste due rette (generatrici) della quadrica, uscenti da un suo punto A possono essere <u>reali</u> e <u>distinte</u>, ovvero <u>reali</u> e <u>coincidenti</u> o in fine <u>immaginarie</u> (<u>coniugate</u>). Nel primo caso il punto A dicesi <u>iperbolico</u>, nel secondo <u>parabolico</u>, nel terzo <u>ellittico</u>.

Inversamente è chiaro che, se per una retta qualunque r giacente sulla quadrica facciamo passare un piano, questo segherà la quadrica in una conica degenere nella retta r ed in una seconda retta r'; e sarà quindi il piano tangente alla quadrica nel punto doppio (r, r').

Stabiliamo i risultati superiori in altro modo, che ci darà altresì un criterio distintivo per riconoscere la specie dei punti di una quadrica. Preso un punto qualunque A della quadrica (1) cangiamo gli elementi di riferimento assumendo il punto A per vertice (0, 0, 0, 1) del tetraedro fondamentale ed il piano ivi tangente p. e. per piano $x_1=0$.

Dovendo la (1) essere soddisfatta da $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ si avrà $a_{44} = 0$. Poichè inoltre l'equazione del piano tangente in $(0, 0, 0, 1)$ è per la (5)

$$a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4 = 0,$$

e questa deve per ipotesi ridursi alla $x_1 = 0$, avremo

$$(6) \qquad a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0.$$

Segando ora la quadrica col piano tangente $x_1 = 0$, rimarrà per l'equazione della sezione:

$$a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0.$$

Questa forma binaria quadratica si decompone nel prodotto di due fattori lineari e perciò la conica sezione è degenere in una coppia di rette uscenti da $(0, 0, 0, 1)$.

Ma possiamo ora di più distinguere se queste rette saranno reali od immaginarie, o reali coincidenti, ciò avviene secondo che

$$a_{23}^2 - a_{22} a_{33} > 0, < 0 \text{ od } = 0.$$

Ora il discriminante Δ' della nuova equazione della quadrica è per la (6)

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}^2 (a_{23}^2 - a_{22} a_{33})$$

e Δ' ha quindi il segno di $a_{23}^2 - a_{22} a_{33}$, escludendo

il caso $a_{14}=0$, ove per le (6), mancando x_4 nell'equazione della quadrica, questa sarebbe un cono col vertice nel punto in considerazione (0, 0, 0, 1). D'altra parte, siccome pel teorema del § 94 il segno del discriminante di una forma quadratica ~~non muta~~ per sostituzione lineare sulle variabili della forma, possiamo riferirci al segno del discriminante primitivo Δ invece che a quello di Δ' ed abbiamo quindi il semplice resultato:

Un punto di una quadrica è ellittico, iperbolico o parabolico secondo che il discriminante Δ è negativo, positivo o nullo. (1)

Come corollario ne segue che tutti i punti di una quadrica sono della medesima specie, ed ancora: le quadriche a punti parabolici sono unicamente i coni.

Osserviamo poi che nelle quadriche a punti ellittici ogni piano tangente, incontrandole

---

(1) Che il segno del discriminante dovesse essere legato alla forma della quadrica si poteva riconoscere a priori osservando che, data la quadrica, i coefficienti della sua equazione sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità, comparendo questo alla quarta potenza in Δ, il segno di Δ è fisso colla quadrica.

la superficie nel solo punto di contatto, lascia tutta la quadrica da una banda di esso. Invece nelle quadriche a punti iperbolici la quadrica giace un po' da una parte, un po' dall'altra di ogni suo piano tangente.

"§143"

Punti coniugati rispetto ad una quadrica. Piano polare di un punto

Diciamo due punti $(x_i')(x_i'')$ coniugati rispetto ad una quadrica quando il segmento che li misura è diviso armonicamente nei due punti d'intersezione A, B colla quadrica. Precisamente come al §102 troviamo: Affinchè due punti (x_i'), (x_i'') siano coniugati rispetto alla quadrica fondamentale $f_{xx}=0$, è necessario e sufficiente che si annulli l'espressione bilineare $f_{x'x''}$ nelle loro coordinate data dalla (II).

Se ora supponiamo fisso il primo punto (x_i') e variabile il secondo, le cui coordinate indichiamo quindi col simbolo x_i delle coordinate correnti, ne deduciamo:

Il luogo di tutti i coniugati armonici di un punto fisso (x'_i) rispetto alla quadrica $f_{xx}=0$ è il piano rappresentato dalla equazione:

$$(7)\ (a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3+a_{14}x'_4)x_1+(a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3+a_{24}x'_4)x_2+$$
$$+(a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+a_{33}x'_3+a_{34}x'_4)x_3+(a_{41}x'_1+a_{42}x'_2+a_{43}x'_3+a_{44}x'_4)x_4=0$$

Questo piano dicesi il piano polare del punto (x'_i) rispetto alla conica. L'equazione (7) del piano polare viene a coincidere con quella (5) del piano tangente, quando il punto (x'_i) cada in un punto (y_i) della quadrica, dunque: Il piano polare di un punto della quadrica è il piano tangente nel punto.

Viceversa, se il piano polare $f_{x'x}=0$ di un punto (x'_i) passa pel punto stesso, si ha $f_{x'x'}=0$ ed il punto (x'_i) è sulla quadrica, onde il piano polare diventa il piano tangente.

Questi teoremi possono anche dedursi facilmente, per via geometrica, dagli analoghi per le coniche mediante l'osservazione fondamentale che: se due punti AB sono coniugati rispetto ad una quadrica essi sono anche coniugati rispetto alla conica secondo cui un piano qualunque per la retta AB sega la

quadrica; e viceversa. Ciò posto, se consideriamo la stella di piani col centro in un punto A e rispetto a ciascuna conica sezione di questi piani colla quadrica prendiamo le rette polari a, a', a"... queste a due a due si incontrano, perchè ad esempio le due polari a a' hanno a comune il punto coniugato di A sulla retta d'intersezione dei piani Aa, Aa'. E poichè le a, a', a"... non passano per un punto, esse giacciono in un piano che è il luogo di tutti i coniugati di A, cioè il piano polare.

"§144"

Polarità rispetto ad una quadrica irriducibile

Ogni punto (y_i) dello spazio ha, rispetto alla quadrica $f_{xx}=0$, un determinato piano polare di equazione $f_{yx}=0$; le coordinate $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$ del piano polare sono quindi date dalle formule

$$(III)\quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4 \\ \xi_2 = a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4 \\ \xi_3 = a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4 \\ \xi_4 = a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4 \end{cases}$$

Supponiamo ora che la quadrica sia irriducibile, cioè non sia nè un cono nè una sottospecie; allora, il discriminante Δ, cioè il determinante delle a_{ik}, essendo diverso da zero, le (III) possono risolversi rispetto alle y e, trascurando un fattore di proporzionalità, le formule inverse si scrivono

$$(IV)\quad \begin{cases} y_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3 + A_{41}\xi_4 \\ y_2 = A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 + A_{42}\xi_4 \\ y_3 = A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{43}\xi_4 \\ y_4 = A_{14}\xi_1 + A_{24}\xi_2 + A_{34}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{cases}$$

Queste ci dimostrano che un piano arbitrario (ξ_i) dello spazio è piano polare di un solo punto (y_i) dello spazio; questo dicesi il polo del piano. Così: Una quadrica propria (irriducibile) determina una corrispondenza biunivoca fra i punti ed i piani dello spazio (corrispondenza polare), ad ogni punto (polo) corrispondendo un piano (piano polare) ed inversamente. I punti che giacciono sui piani corrispondenti sono i punti della quadrica ed i piani che passano pei punti corrispondenti sono i piani tangenti della quadrica [1]

---

[1] Quando la quadrica è un cono o una coppia

Se il polo P descrive una punteggiata, avrà coordinate variabili della forma

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$$

e le coordinate del piano polare π saranno

$$\xi_i = \lambda \xi_i' + \mu \xi_i'',$$

essendo (ξ_i'), (ξ_i'') i rispettivi piani polari di (x_i') (x_i'') (cof § 103). Dunque: Se un punto P descrive una punteggiata, il suo piano polare π descrive un fascio projettivo alla punteggiata.

Precisamente come al § 103 si vede poi che sussiste il teorema:

Sopra una retta qualunque r dello spazio esistono infinite coppie di punti coniugati; queste formano un'involuzione i cui punti doppi sono i punti d'intersezione di r colla quadrica.

---

di piani il piano polare di qualsiasi punto passa pel vertice o per la retta doppia. Solo i piani pel vertice o per la retta doppia hanno allora un polo; ed anzi ∞^1 poli i primi allineati col vertice, ∞^2 poli i secondi in un piano colla retta doppia.

§ 145.

Piani coniugati - Equazioni tangenziali

Due piani si dicono coniugati rispetto ad una quadrica quando il secondo contiene il polo del primo e quindi il primo il polo del secondo. La condizione affinchè due piani (ξ_i), (η_i) siano coniugati si trova subito osservando che il polo (y_i) del piano (ξ_i) deve stare sul piano (η_i), che si deve avere cioè

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0.$$

Sostituendo per la y_i i loro valori (IV) ne deduciamo dunque: Affinchè due piani (ξ_i), (η_i) siano coniugati rispetto alla quadrica occorre e basta che sia verificata la condizione

$$(8) \qquad \sum_{ik}^{1..4} A_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0.$$

Di qui si deduce in particolare la condizione affinchè un piano (ξ_i) sia tangente alla quadrica; esso deve essere per ciò contenere il proprio polo, cioè essere coniugato di sè stesso. Facendo dunque nella (8) le η eguali alle ξ, abbiamo:

Un piano $(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4)$ tocca la quadrica quando le sue coordinate ξ soddisfano l'equazione

$$(V) \qquad \sum_{ik}^{1..4} A_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0.$$

Questa dicesi per ciò l'equazione tangenziale della quadrica; essa è l'equazione della quadrica, considerata come inviluppo dei suoi piani tangenti. Essendo la (V) di 2° grado, si conclude: Le quadriche irriducibili sono superficie di 2ª classe, cioè da una retta arbitraria dello spazio partono due piani tangenti alla quadrica, reali od immaginari, distinti o coincidenti.

"§ 146"

Cono circoscritto - Rette coniugate.

Cerchiamo le tangenti che da un punto (x_i') dello spazio partono alla quadrica. Se (x_i'') è il punto di contatto di una tale tangente, si ha $f_{x''x''}=0$ e l'equazione fondamentale (I) che ha già una radice nulla deve aver nulla anche la seconda, cioè deve

essere $f_{x'x''}=0$. Il punto di contatto (x_i'') deve dunque trovarsi nel piano polare π del punto (x_i'); e poichè è anche sulla quadrica, sarà sulla conica d'intersezione del piano polare π colla quadrica.

Viceversa per ogni punto (x_i'') di C si ha

$$f_{x'x''}=0\ ,\ f_{x''x''}=0$$

e quindi la retta (x_i'), (x_i'') tocca in (x_i'') la quadrica. Dunque: Le tangenti da un punto P dello spazio alla quadrica sono tutte e sole le rette che projettano da P i punti della conica C sezione del piano π polare di P colla quadrica. Esse formano un cono del 2° grado, che dicesi il cono circoscritto da P alla quadrica.

La conica C forma il contorno apparente della superficie vista dal punto P. Naturalmente il cono circoscritto può essere reale od immaginario, secondo che la conica C è reale od immaginaria. Se il cono circoscritto da P è reale il punto P dicesi esterno alla quadrica, se è immaginario interno.

Ma qui è da osservare che vi sono delle quadriche, quelle a punti iperboli-

ci, per le quali il cono circoscritto da qualsia-si punto dello spazio è sempre reale ed ogni punto è da dirsi quindi esterno alla quadrica. Infatti le quadriche a punti iperbolici sono superficie rigate (anzi doppiamente rigate) poichè da ogni punto della quadrica partono due rette giacenti sulla superficie. Ora in una superficie rigata (luogo di una retta mobile) qualunque piano dello spazio produce una sezione reale perchè un piano ed una retta reali s'incontrano sempre in un punto reale.

Si è già osservato (§ 144) che se un punto P percorre una retta r, il suo piano polare π ruota attorno ad una seconda retta r'. Viceversa un punto qualunque Q sopra r' ha un piano polare che passa per la retta r poichè il piano polare di un punto qualsiasi P di r passa per Q ed il piano polare di Q passa quindi per P coniugato armonico di Q.

Due tali rette r, r' sono dunque in relazione perfettamente invertibile; esse diconsi <u>rette coniugate</u>, o <u>reciproche</u> o anche <u>polari</u> rispetto alla quadrica.

È chiaro che un piano qualunque per

r sega la quadrica in una conica, rispetto alla quale il polo di r è nel punto d'incontro di quel piano colla polare r' di r.

L'involuzione di punti coniugati sulla retta r (§ 144) è projettata dall'asse r secondo un'involuzione di piani; i piani doppî di quest'involuzione sono i piani tangenti per r alla quadrica, che projettano dunque da r i due punti ove la polare r' sega la quadrica.

"§ 147" Involuzione delle tangenti coniugate attorno ad un punto

Due rette r, r' coniugate rispetto alla quadrica sono in generale sghembe. Quando giacciono in un piano π, e s'incontrano quindi in un punto P (proprio o improprio) il piano polare di P passa tanto per r' quanto per r ed è quindi il piano π; dunque P è sulla quadrica e le rette r, r', giacendo sul piano π tangente in P, sono tangenti in P alla quadrica. Viceversa se la retta t è tangente in A alla quadrica, la coniugata t' è pure tangente in A. Ulteriormente se t giace sulla quadrica la coniugata t' coin-

cide con t; ed inversamente una retta autoconiugata (coniugata di sè stessa) giace sulla quadrica.

Le tangenti in un punto ad una quadrica si distribuiscono quindi in coppie di tangenti coniugate. È facile vedere che queste formano un'involuzione; poichè sopra una retta qualunque r giacente nel piano tangente quelle coppie segnano coppie di punti coniugati che formano un'involuzione (§144). Dunque: <u>Le coppie di tangenti coniugate in un punto A ad una quadrica formano un'involuzione, i raggi doppi sono le generatrici uscenti da A della quadrica.</u>

Osserviamo che una sezione piana della quadrica, fatta con un piano parallelo al piano tangente in A, ha per punti all'infinito i due punti all'infinito delle due generatrici per A; queste segnano dunque le direzioni assintotiche della conica sezione e perciò due tangenti coniugate sono parallele a due diametri coniugati della conica.

Ogni piano parallelo ad un piano tangente della quadrica produce quindi una sezione ellittica, iperbolica o parabolica, secondo che la quadrica è a punti ellittici, iperbolici o

paraboloici (coni?).

In generale fra le coppie della involuzione delle tangenti coniugate ve ne ha una ed una soltanto ortogonale, quella delle direzioni degli assi della conica sezione con un piano parallelo al piano tangente (Indicatrice di Dupin). Se la involuzione è composta di coppie tutte ortogonali, le dette sezioni sono circoli, ed il punto dicesi un punto circolare od ombelico della quadrica.

§148.

Tetraedri autoconiugati - Forma canonica dell'equazione di una quadrica.

Un tetraedro dicesi autoconiugato o polare rispetto ad una quadrica, se ciascuno dei quattro vertici è polo della faccia opposta. Per formare un tetraedro autoconiugato si può prendere ad arbitrio un vertice A, sul piano polare a di questo ad arbitrio un secondo vertice B; la retta r coniugata della AB giace nel piano a ed il terzo vertice C si può ancora prendere ad arbitrio sulla detta retta r. Il polo D del piano ABC giace su r,

e si vede subito che $ABCD$ è un tetraedro autoconiugato; dunque: intorno ∞^6 tetraedri autoconiugati rispetto ad una quadrica.

Si osservi 1° che ogni faccia del tetraedro è un triangolo autoconiugato rispetto alla conica sezione del suo piano, 2°: ogni spigolo del tetraedro è coniugato dello spigolo opposto. Per definire un tetraedro autoconiugato si può anche in un piano arbitrario α dello spazio prendere ad arbitrio un triangolo BCD autoconiugato rispetto alla conica sezione; il polo A di α dà il quarto vertice del tetraedro. Oppure, prese ad arbitrio due rette coniugate r, r', si può segnare sulla prima una coppia qualunque AB di punti coniugati e sulla seconda un'altra coppia CD.

Prendiamo ora un tetraedro autoconiugato per tetraedro fondamentale $A_1A_2A_3A_4$. Il piano polare del vertice A_i deve essere il piano $x_i = 0$; d'altronde per il punto A_i è $x_i = 1$ e le altre coordinate sono nulle e l'equazione (7) del piano polare diventa

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 = 0$$

che deve ridursi alla $x_i = 0$; dunque i coefficienti a_{ik} con indici i, k disuguali sono tutti nulli.

L'equazione della quadrica sarà

per ciò a contenere i soli quadrati delle variabili, avrà cioè la forma

$$(9) \qquad \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0$$

Questa dicesi la forma canonica dell'equazione della quadrica. Abbiamo dunque dimostrato il teorema: Una forma quadratica quaternaria si può sempre ridurre con una sostituzione lineare (in ∞^6 modi diversi) a contenere i soli quadrati delle variabili. (cf. § 105).

Capitolo 14°

Piani diametrali nelle quadriche – Centro – Piani diametrali principali

§ 149

Equazioni fondamentali in coordinate cartesiane – Piani diametrali.

Il seguito di queste lezioni essendo dedicato allo studio delle proprietà <u>metriche</u> delle quadriche, ci serviamo d'ora in poi di coordinate cartesiane. Cominciando dal tradurre i resultati generali del Capitolo precedente nel sistema cartesiano supponiamo che x_1, x_2, x_3, x_4 abbiano il significato di coordinate Cartesiane omogenee, il piano $x_4 = 0$ essendo il piano all'infinito. Per i punti a distanza finita i rapporti $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ dovranno sostituirsi colle coordinate cartesiane ordinarie x, y, z; e così l'equazione generale di una quadrica si scriverà sotto la forma:

(1) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$

L'equazione del piano polare di un punto qualunque (x', y', z') dello spazio (a distanza finita) si dedurrà dalla (7) § 143, ponendovi

$$x_1' = x',\; x_2' = y',\; x_3' = z',\; x_4' = 1$$

$$\frac{x_1}{x_4} = x,\; \frac{x_2}{x_4} = y\; \frac{x_3}{x_4} = z,$$

e sarà quindi:

(2) $(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+a_{14})x+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+a_{24})y+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+a_{34})z+$
$+a_{41}x'+a_{42}y'+a_{43}z'+a_{44}=0.$

Se il punto (x', y', z') appartiene alla quadrica, questa sarà l'equazione del piano tangente nel punto.

In particolare se la quadrica passa per l'origine sarà $a_{44}=0$, e l'equazione del piano tangente nell'origine sarà per la (2)

$$a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z=0,$$

cioè: si otterrà eguagliando a zero il complesso dei termini lineari.

Un punto a distanza infinita (una direzione) viene individuato in coordinate cartesiane dando le coordinate (x_1, y_1, z_1) di un punto, che congiunto colla origine assegna la corrispondente direzione. In particolare se, come il più delle volte supporremo, gli assi saranno ortogonali, fis-

seremo la direzione mediante i suoi coseni $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, che potranno sostituire ordinatamente a x_1, y_1, z_1. Le coordinate cartesiane omogenee del detto punto all'infinito saranno nel caso di assi obliqui

(8) $$x'_1 = x_1,\ x'_2 = y_1,\ x'_3 = z_1,\ x'_4 = 0,$$

e nel caso di assi ortogonali

(8*) $$x'_1 = \cos\alpha,\ x'_2 = \cos\beta,\ x'_3 = \cos\gamma,\ x'_4 = 0.$$

Il piano polare di un punto all'infinito divide per metà tutte le corde parallele a quella direzione, poichè sopra ogni corda il coniugato armonico del punto all'infinito è il punto medio della corda. L'equazione di questo piano si ottiene dalla (7) §143 colle sostituzioni (8), (8*), ed ha quindi la forma

(9) $$(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1)x+(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1)y+(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1)z+a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1=0$$

o l'altra

(10) $$(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\cos\beta+a_{13}\cos\gamma)x+(a_{21}\cos\alpha+a_{22}\cos\beta+a_{23}\cos\gamma)y+(a_{31}\cos\alpha+a_{32}\cos\beta+a_{33}\cos\gamma)z+$$
$$+a_{41}\cos\alpha+a_{42}\cos\beta+a_{43}\cos\gamma=0,$$

secondo che, essendo gli assi obliqui od ortogonali, si determina la direzione come quella che congiunge l'origine al punto (x_1, y_1, z_1), ovvero mediante i coseni di direzione.

Dunque: *Il luogo dei punti di mezzo delle corde di una quadrica parallele ad una data direzione è un piano di equazione (9) o (10).*

Questo dicesi il piano diametrale coniugato a quella direzione.

§ 150.

Centro della quadrica

Gli infiniti piani diametrali, come piani polari dei punti del piano all'infinito, passano tutti pel polo di questo piano, polo che esiste certamente per una quadrica irriducibile. Questo punto dicesi centro della quadrica perchè, essendo coniugato dei punti all'infinito, è il punto medio di ogni corda tirata per esso.

Per trovare le coordinate del centro osserviamo che, in coordinate cartesiane omogenee l'equazione del piano all'infinito è $x_4 = 0$ e quindi le sue coordinate sono

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 0, \ \xi_3 = 0, \ \xi_4 = 1$$

Nelle formole generali (4) § 144 facendo queste posizioni, per le coordinate omogenee del centro avremo

$$(11) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44} .$$

Per passare alle coordinate ordinarie conviene distinguere secondo che $A_{44} \neq 0$, ovvero $A_{44} = 0$. Nel secondo caso a causa dell'equazione tangenziale

(V) § 145 della quadrica, il piano all'infinito tocca la quadrica ed il centro è quindi all'infinito in questo punto di contatto; nel primo caso invece il piano all'infinito non è tangente alla quadrica ed il centro è a distanza finita).

Le quadriche irriducibili si distinguono perciò in due classi, quelle con $A_{44} \neq 0$ e quelle con $A_{44} = 0$. Le prime sono quadriche dotate di centro (a distanza finita) e le coordinate x_0, y_0, z_0 del centro sono date, secondo le (11), dalle formole

$$(12) \quad x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}.$$

Le seconde diconsi quadriche prive di centro, o col centro all'infinito in una determinata direzione, quella che va dall'origine al punto di coordinate A_{14}, A_{24}, A_{34}. Vera indeterminazione nel centro non può aversi nel caso di quadriche irriducibili, come risulta da quanto si è detto sopra ed anche da ciò che se insieme fosse

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$$

sarebbe anche $\Delta = 0$.

Definendo come centro della quadrica un punto tale che tutte le corde tirate per esso siano ivi bisecate, si ha una definizione del centro che vale tanto per le quadriche riducibili come per le irriducibi-

lit.

Rispetto al centro delle quadriche riducibili basterà che ci limitiamo alle osservazioni seguenti di immediata evidenza geometrica, che sarebbe facile confermare analiticamente. Se la quadrica è un cono col vertice proprio, si ha ancora un unico centro, il vertice del cono. Se il cono, allontanandosi il vertice all'infinito, diventa un cilindro si ha una retta tutta costituita di centri, l'asse del cilindro, cioè la retta condotta pel centro di una qualunque sua sezione piana parallelamente alle generatrici. Ancora una semplice infinità di centri abbiamo nel caso che la quadrica sia degenere in una coppia di piani convergenti, la retta d'intersezione dei due piani. Ma se i due piani che costituiscono la quadrica sono paralleli si ha una doppia infinità di centri distribuiti sul piano medio dello strato compreso fra i due paralleli.

"§ 151"

Le cinque specie di quadriche

Veniamo ora a classificare le quadriche in varie specie a seconda del loro modo di com-

portarsi rispetto al piano all'infinito.

Il piano all'infinito $x_4 = 0$ sega la quadrica (1) secondo una conica, la cui equazione in coordinate omogenee è

$$(13)\ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Dunque: l'equazione in coordinate cartesiane

$$(14)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

ottenuta eguagliando a zero il complesso dei termini di secondo grado nella equazione (1) della quadrica, rappresenta il cono che dall'origine projetta la conica all'infinito della quadrica.

Supponiamo dapprima che la quadrica considerata sia irriducibile, e distinguiamo secondo che la quadrica è dotata di centro, ovvero priva di centro (§ prec.)

1° caso. Per le quadriche a centro il piano all'infinito non è tangente e quindi la conica (13), ovvero il cono (14), non è degenere ($A_{44} \neq 0$). Questa conica può essere immaginaria, ovvero reale, i criterii analitici per distinguere l'un caso dall'altro si desumono facilmente da quanto abbiamo esposto nella teoria delle coniche (cf. particolarmente § 122).

a) La conica C_∞ all'infinito sia immaginaria;

allora la quadrica stessa può essere reale od immaginaria. Se è reale, essa non ha pero punti reali all'infinito, cioè è tutta a distanza finita e le sue sezioni piane sono tutte ellissi: la superf. ciò dicesi allora un <u>ellissoide</u>. Se poi la quadrica è immaginaria allora si dice un <u>ellissoide immaginario</u>.

b) La conica C_∞ sia reale. Un piano qualunque π dello spazio produce nella quadrica una sezione ellittica, iperbolica o parabolica secondo che la retta all'infinito di π taglia C_∞ in due punti immaginarii, ovvero reali e distinti o infine coincidenti. La quadrica (sempre reale) ammette tutte tre le specie di sezioni e dicesi un <u>iperboloide</u>. L'iperboloide può poi essere a punti ellittici ($\Delta < 0$) ovvero a punti iperbolici ($\Delta > 0$), e dicesi nel primo caso <u>iperboloide a due falde</u>, nel secondo <u>iperboloide ad una falda</u>, per ragione della sua forma che sarà esaminata più avanti (Cap. 14).

<u>2° caso</u> <u>Quadriche prive di centro</u>. La conica C_∞ è degenere in una coppia di rette, che possono essere immaginarie coniugate; ovvero reali, ma in ogni caso distinte, la quadrica

essendo supposta irriducibile.[1] In tutti due i casi essendovi almeno un punto reale all'infinito della quadrica (irriducibile), il punto doppio di C_∞, la quadrica è sempre reale. Ma se C_∞ è composta di due rette immaginarie tutti i punti della quadrica sono ellittici e la quadrica dicesi un paraboloide ellittico. Se poi C_∞ è degenere in una coppia di rette reali, ogni punto della quadrica è iperbolico e la quadrica prende il nome di paraboloide iperbolico. I due paraboloidi si distinguono l'uno dall'altro semplicemente pel segno del discriminante Δ negativo per la prima quadrica, positivo per la seconda (§ 142). Esaminando poi i punti d'incontro di un piano qualunque π con C_∞, si vede subito che nel paraboloide ellittico tutte le sezioni piane sono ellissi ovvero parabole; pel paraboloide iperbolico invece iperbole e parabole; di qui i nomi dati alle due quadriche. Le sezioni paraboliche si ottengono nei due paraboloide unicamente quando il piano

---

(1) Se coincidessero, ogni altro piano tangente taglierebbe (come il piano all'infinito) la quadrica in due rette coincidenti e la superficie sarebbe un cono (un cilindro).

segante è parallelo alla direzione segnata dal punto all'infinito doppio per C_∞ (direzione dell'asse del paraboloide).

Così sono completamente classificate le quadriche irriducibili; e se vogliamo completare la classificazione anche per le quadriche riducibili (lasciando da parte il caso, privo di interesse, delle quadriche degeneri) basterà che distinguiamo il caso di un cono col vertice proprio da quello di un cono col vertice improprio o cilindro.

Un cono proprio reale è tagliato dal piano all'infinito secondo una conica reale non degenere. Vi ha quindi una sola specie di coni e, come più tardi vedremo, la forma di un cono quadrico è sempre quella di un cono circolare obliquo o retto.

Un cilindro quadrico sega il piano all'infinito secondo due generatrici, che possono essere immaginarie coniugate, ovvero reali e distinte o infine coincidenti. Nel primo caso le sezioni piane del cilindro sono tutte ellissi, nel secondo tutte iperbole, nel terzo tutte parabole. Quindi tre specie di cilindri: <u>cilindro ellittico, iperbolico o parabolico</u>.

§ 152.

Equazione cubica per la determinazione delle direzioni principali in una quadrica.

Veniamo ora ad una ricerca d'importanza fondamentale per la teoria delle quadriche. Si è visto che ad ogni direzione corrisponde un piano diametrale coniugato, che divide per metà tutte le corde parallele a quella direzione. In generale avviene che il piano diametrale taglia obliquamente le corde coniugate che divide per metà (1). Quando esso sia perpendicolare alle corde coniugate si dice un piano diametrale principale e la direzione coniugata prende il nome di direzione principale. Un piano diametrale principale è evidentemente un piano di simmetria (ortogonale) per la quadrica, e viceversa; e già s'intende quale importanza debba

---

(1) Solo nel caso della sfera ogni piano diametrale è perpendicolare alla direzione coniugata.

avere, per lo studio della forma della quadrica, la ricerca dei suoi piani di simmetria a cui ora ci accingiamo. Faremo uso da ora in poi di <u>assi cartesiani ortogonali</u>, come i più appropriati a questa specie di ricerche.

Fissando allora una direzione mediante i suoi coseni ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), partiremo dalla equazione (13) § 149 del piano diametrale coniugato e cercheremo di determinare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in guisa che quella direzione sia principale cioè perpendicolare al piano diametrale coniugato (13). Sappiamo (§ 58) che i coseni di direzione della normale ad un piano sono proporzionali rispettivamente ai coefficienti di x, y, z nella sua equazione e poichè nella (13) questi coefficienti sono i tre trinomii

$$a_{i1}\cos\alpha + a_{i2}\cos\beta + a_{i3}\cos\gamma \quad (i = 1, 2, 3),$$

esprimeremo che la direzione ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) è principale, scrivendo che i coseni debbono soddisfare le tre equazioni

$$(15)\quad \begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma = \rho\cos\alpha \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma = \rho\cos\beta \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma = \rho\cos\gamma \end{cases}$$

dove ρ è un fattore (incognito) di proporzionalità. Queste danno soltanto le condizioni <u>necessa-</u>

rie e sufficienti perché la direzione sia principale.

Il nostro problema, dal punto di vista algebrico, è quello della risoluzione del sistema di quattro equazioni a quattro incognite

$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma; \rho$$

che si ottiene associando alle tre (15) la relazione quadratica fra i coseni

(16) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Intanto, se nelle (15) riguardiamo ρ come nota, abbiamo tre equazioni lineari ed omogenee nelle tre incognite $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e perché possano coesistere è necessario e sufficiente che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\rho \end{vmatrix}.$$

Così abbiamo eliminate tre delle incognite e formata l'equazione risultante nella quarta incognita ρ, equazione cubica per la quale adotteremo la notazione

(I) $$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Qualche volta occorrerà scrivere sviluppando

$$(I^*)\quad D(\rho) = -\rho^3 + \{a_{11} + a_{22} + a_{33}\}\rho^2 - \{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\}\rho + A_{44} = 0$$

Viceversa se $\rho = \rho_1$ è una radice (reale) di questa equazione, esiste almeno un sistema di valori dei rapporti

$$x_1 : x_2 : x_3$$

nelle tre equazioni lineari ed omogenee

$$(17)\quad \begin{cases} (a_{11} - \rho_1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \rho_1)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \rho_1)x_3 = 0 \end{cases}$$

che le soddisfano e quindi almeno una direzione principale corrispondente.

§153.

Corrispondenza fra le radici di $D(\rho)=0$ e le direzioni principali.

Esaminiamo meglio la corrispondenza fra le radici della equazione cubica e le direzioni principali. 1° Se la radice $\rho = \rho_1$ della $D(\rho) = 0$ non annulla tutti i minori di 2° ordine, cioè rende $D(\rho_1)$ di caratteristica $= 2$, le equazioni (17), riducendosi a due distinte, de-

terminano perfettamente i rapporti delle incognite $x_1 : x_2 : x_3$ e quindi i coseni della direzione principale corrispondente sono (a meno di un cangiamento simultaneo di segno) perfettamente determinati dalle formole

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

2° Se la radice $\rho=\rho_1$ annulla tutti i minori di 2° ordine di $D(\rho_1)$ e non tutti quelli del 1° (cioè gli elementi), la caratteristica di $D(\rho_1)$ è $=1$ e le tre equazioni (14) si riducono ad una sola. Dovendo così $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ soddisfare ad una unica equazione lineare omogenea, vi saranno ∞^1 direzioni principali corrispondenti a quella radice ρ_1 le quali, fatte uscire da un medesimo punto, giaceranno in un piano.

3° Se la radice $\rho=\rho_1$ annulla tutti i minori del 1° ordine (elementi) si ha

$$(18) \qquad \begin{cases} a_{11}=a_{22}=a_{33}=\rho_1 \\ a_{12}=a_{23}=a_{31}=0 \end{cases}$$

e l'equazione della quadrica si può scrivere

$$x^2+y^2+z^2+2a'_{14}x+2a'_{24}y+2a'_{34}z+a'_{44}=0$$

od anche

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\text{cost}^{e},$$

e la superficie è quindi una sfera (reale o immaginaria). In questo caso le (17) sono tutte identità ed ogni direzione è principale, come geometricamente è evidente.

Semplifichiamo l'enunciato di questi resultati dimostrando che i tre casi sopra distinti corrispondono ordinatamente alle ipotesi seguenti 1°) ρ_1 sia radice semplice, 2°) ρ_1 sia radice doppia, 3°) ρ_1 sia radice tripla.

E' chiaro intanto che nel 3° caso la radice ρ_1, a causa delle (18), è appunto tripla. Viceversa se la radice è tripla, sussisteranno le (18) e la superficie sarà una sfera. E infatti in questo caso dobbiamo avere identicamente

$$D(\rho) = (\rho_1 - \rho)^3 = -\rho^3 + 3\rho_1\rho^2 - 3\rho_1^2\rho + \rho_1^3,$$

quindi

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3\rho_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2) = 3\rho_1^2, \end{cases}$$

che possiamo anche scrivere:

$$(\alpha)\qquad (a_{11} - \rho_1) + (a_{22} - \rho_1) + (a_{33} - \rho_1) = 0$$

$$(\beta)\ \{(a_{11}-\rho_1)(a_{22}-\rho_1) - a_{12}^2\} + \{(a_{22}-\rho_1)(a_{33}-\rho_1) - a_{23}^2\} + \{(a_{33}-\rho_1)(a_{11}-\rho_1) - a_{13}^2\}$$

Quadrando la (α) e sottraendo il doppio della (β), ne viene

$$(a_{11}-\rho_1)^2 + (a_{22}-\rho_1)^2 + (a_{33}-\rho_1)^2 + 2a_{12}^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{13}^2 = 0,$$

da cui, osservando che si tratta qui di quan

lità tutte reali; seguono appunto le (8).

Osserviamo ora in generale che una radice doppia deve annullare, insieme al determinante $D(\varrho)$, anche la sua derivata $D'(\varrho)$; ma questa, per la regola di derivazione dei determinanti, è data da

$$(19).\quad D'(\varrho) = -\{D_{11}(\varrho) + D_{22}(\varrho) + D_{33}(\varrho)\}$$

dove con $D_{ik}(\varrho)$ indichiamo in generale i minori di 2° ordine di $D(\varrho)$. Ora nel 2° caso essendo nulli tutti i minori di 2° ordine in $D(\varrho_1)$, quindi i tre principali e per ciò dalla (29) anche $D'(\varrho_1)$, la radice ϱ_1 è doppia (non tripla, appartenendo questa al 3° caso). Viceversa, se ϱ_1 è radice doppia, si annullano $D(\varrho_1)$ e $D'(\varrho_1)$ quindi

$$D_{11}(\varrho_1) + D_{22}(\varrho_1) + D_{33}(\varrho_1),$$

e per ciò anche tutti i minori di 2° ordine nel determinante simmetrico $D(\varrho_1)$ (1), onde sia-

---

(1) In forza del teorema: Se un determinante simmetrico $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ è nullo, ed è nulla la somma dei minori principali:

$$A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} = 0,$$

mo appunto nei 2 casi;

Concludiamo dunque: Ad una radice semplice dell'equazione cubica $D(\rho)=0$ corrisponde una ed una sola direzione principale, ad una radice doppia corrispondono ∞¹ direzioni principali parallele ad un piano. Se infine l'equazione cubica ha un'unica radice (tripla) tutte le direzioni sono principali e la quadrica è una sfera.

"§ 154"

Realità delle radici dell'equazione cubica e più in generale dell'equazione secolare

Dell'equazione cubica $D(\rho)=0$, che è a coeffi-

---

sono nulli tutti i minori A_{ik}.

Nel determinante reciproco $|A_{ik}|$ sono nulli infatti tutti i minori del 2° ordine e si ha perciò

$$(\gamma)\ A_{ii}\,A_{kk} = A_{ik}^2 \quad (i,k = 1, 2 \dots n),$$

onde A_{ii}, A_{kk}, se nessuno dei due è nullo, hanno lo stesso segno. Ma siccome è nulla per ipotesi la somma ΣA_{ii}, sono nulli tutti i minori principali e quindi per la (γ) anche gli altri.

cienti reali e di grado impari possiamo dire a priori che ammette almeno una radice reale. Ora è importante il fatto che in forza della sua forma speciale: <u>l'equazione cubica $D(\rho)=0$ ha sempre tutte tre le radici reali</u>.

Questo teorema non è che un caso particolare di un teorema generale relativo alla equazione di grado <u>n</u> della forma

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

ottenuta sottraendo dagli elementi della diagonale principale di un determinante <u>simmetrico</u> d'ordine <u>n</u> un'incognita ρ ed eguagliando a zero. Dimostreremo che: <u>Ogni equazione della forma (II) ha sempre tutte le n radici reali</u>.

Per $n=2$ abbiamo incontrato un'equazione di questo tipo nella determinazione degli assi di una conica (§ 118 equazione (A)); per $n=3$ la troviamo ora nella ricerca delle direzioni principali o dei piani diametrali principali di una quadrica; pel caso di n qualunque si presenta nel problema generalizzato della riduzione di una forma quadratica ad <u>n</u> variabili ad una somma di

quadrati (alla forma canonica) mediante una sostituzione ortogonale. L'equazione (II) dicesi equazione secolare pel suo significato in ricerche di meccanica celeste.

La dimostrazione del teorema enunciato si fonda sulle osservazioni seguenti. Sia ρ_1 una radice reale o complessa della (II); essendo nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho_1, & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho_1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\rho_1 \end{vmatrix}$$

sono compatibili le n equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{cases} (a_{11}-\rho_1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\rho_1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\rho_1)x_n = 0 \end{cases}$$

nelle n incognite $x_1\, x_2 \ldots x_n$ esiste quindi almeno un sistema di valori non tutti nulli per le x che soddisfano queste equazioni o, scritto più brevemente, il sistema

$$(20) \qquad \sum_k^{1\ldots n} a_{ik}x_k = \rho_1 x_i \quad (i = 1,2 \ldots n).$$

Sia ora ρ_1' una seconda radice della

(II), ed $x'_1\, x'_2 \ldots x'_n$ un sistema di valori che soddisfano le equazioni analoghe alle (20):

$$(20^*) \qquad \sum_k^{1\ldots n} a_{ik} x'_k = \rho'_1 x'_i$$

Dalle (20), (20*) deduciamo

$$\sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, x_k\, x'_i = \rho_1 \sum_i^{1\ldots n} x_i \cdot x'_i$$

$$\sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, x'_k\, x_i = \rho'_1 \sum_i^{1\ldots n} x_i\, x'_i .$$

Permutando nella seconda formola gli indici di sommazione i, k e sottraendo dalla prima, abbiamo

$$\sum_{ik}^{1\ldots n} (a_{ik} - a_{ki})\, x_k\, x'_i = (\rho_1 - \rho'_1) \sum_i x_i\, x'_i .$$

Ma, a causa della simmetria del determinante $|a_{ik}|$ è $a_{ik} = a_{ki}$, otteniamo quindi il risultato fondamentale:

Se ρ_1, ρ'_1 sono due radici qualunque dell'equazione secolare (II) e $x_1, x_2, \ldots x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ sistemi di valori delle incognite che soddisfano le equazioni (20), (20*), si ha identicamente

$$(21) \qquad (\rho_1 - \rho'_1)(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n) = 0.$$

In particolare ne segue che se le due radici ρ_1, ρ'_1 sono distinte, è necessariamente

$$(22)\qquad x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n = 0 .$$

Ora se l'equazione (II) potesse avere una radice complessa ρ_1 avrebbe anche la sua coniugata ρ'_1 distinta da ρ_1. D'altra parte, soddisfacendo le x_i alle (20), potremmo prendere per le x'_i i valori coniugati delle x_i. In tali condizioni la (22) è assurda, perchè il primo membro sarebbe una somma di quadrati non tutti nulli (1). Concludiamo: l'equazione secolare non può avere radici complesse e le ha quindi tutte reali.

---

(1) Senza riduzione all'assurdo si può procedere, con leggera modificazione, così. Sia ρ_1 una radice qualunque e scrivendola nella sua parte reale od immaginaria poniamo

$$\rho_1 = \alpha + i\beta$$

e similmente

$$x_k = \xi_k + i\eta_k .$$

Poniamo poi

$$\rho'_1 = \alpha - i\beta, \quad x'_k = \xi_k - i\eta_k$$

ed avremo dalla (21)

$$2i\beta\{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 + \cdots + \xi_n^2 + \eta_n^2\} = 0$$

da cui $\beta = 0$, cioè ρ_1 reale.

§ 155.

La terna ortogonale di direzioni principali

Applichiamo i resultati generali ottenuti nel § precedente al caso particolare dell'equazione cubica $D(\varsigma)=0$ per la determinazione delle direzioni principali. In primo luogo osserviamo il significato geometrico che assume qui l'equazione fondamentale (22). Siano $\varsigma_1, \varsigma_1'$ due radici distinte qualunque (semplici o multiple) della equazione cubica e siano $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ i coseni di due direzioni principali corrispondenti la prima alla radice ς_1, la seconda alla radice ς_1'. Siccome ponendo

$$x_1 = \cos\alpha, \quad x_2 = \cos\beta, \quad x_3 = \cos\gamma$$
$$x_1' = \cos\alpha', \quad x_2' = \cos\beta', \quad x_3' = \cos\gamma'$$

si soddisfano rispettivamente le (20); (20*), la (22) si trasforma nell'altra:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

che esprime l'ortogonalità delle due direzioni. Abbiamo dunque il teorema:

<u>Due direzioni principali corrispondenti a due radici differenti dell'equazione cubica $D(\varsigma)=0$ sono ortogonali fra loro.</u>

Ciò posto, consideriamo le tre radici del-

la equazione cubica, che sappiamo essere sempre reali, ed indichiamole con

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3.$$

Le tre radici possono essere 1° tutte tre distinte (caso generale), 2° una doppia ed una semplice, 3° tutte tre eguali, caso questo che sappiamo appartenere solo alla sfera.

1° caso. A ciascuna radice corrisponde una sola direzione principale ed abbiamo una terna perfettamente determinata di direzioni principali, due a due ortogonali fra loro (pel teorema precedente).

2° caso. Sia $\rho_1 = \rho_2$ e la terza radice ρ_3 sia semplice. A questa corrisponde una sola direzione principale, mentre alla radice doppia $\rho_1 = \rho_2$ corrispondono co' direzioni principali ortogonali alla prima e parallele per conseguenza ad un piano, come del resto sapevamo già dal § 153.

Due direzioni ortogonali qualunque corrispondenti alla radice doppia, insieme colla radice principale corrispondente alla radice semplice, formano una terna ortogonale di direzione principali. Qui adunque esistono co' terne ortogonali di direzioni principali.

3° caso. In quest'ultimo caso, che è quello

della sfera, qualunque terna ortogonale di direzioni è formata di direzioni principali; abbiamo cioè ∞^2 terne ortogonali di direzioni principali.

In ogni caso adunque esiste almeno una terna reale ortogonale di direzioni principali. Vediamo quale particolarità offrirà l'equazione della quadrica quando per terna ortogonale degli assi coordinati si prenda la terna (od una terna) di direzioni principali. Supponiamo che le respettive direzioni principali degli assi Ox, Oy, Oz corrispondano ordinatamente alle radici

$$\rho_1 , \; \rho_2 , \; \rho_3$$

dell'equazione cubica. Siccome i coseni di direzione degli assi sono rispettivamente

$$\cos\alpha = 1 , \; \cos\beta = 0 , \; \cos\gamma = 0, \quad \text{per } Ox$$
$$\cos\alpha = 0 , \; \cos\beta = 1 , \; \cos\gamma = 0, \quad \text{per } Oy$$
$$\cos\alpha = 0 , \; \cos\beta = 0 , \; \cos\gamma = 1, \quad \text{per } Oz$$

dovranno essere soddisfatte le equazioni fondamentali (15) ponendovi successivamente per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ le tre terne di valori precedenti e per ρ ordinatamente ρ_1, ρ_2, ρ_3. Colla sostituzione effettiva troviamo

$$a_{11} = \rho_1 , \quad a_{22} = \rho_2 , \quad a_{33} = \rho_3$$
$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0.$$

Abbiamo dunque il resultato. Assumendo

per terna di assi coordinati la terna ortogonale di direzioni principali, la forma ternaria quadratica, costituita dall'insieme dei termini di 2° grado nell'equazione della quadrica, prende la forma ridotta

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2,$$

dove ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono le radici dell'equazione cubica $D(\rho)=0$.

In questo teorema è inclusa evidentemente la seguente proprietà dell'equazione cubica $D(\rho)=0$: Per una trasformazione qualunque di assi coordinati ortogonali non variano le radici dell'equazione cubica $D(\rho)=0$.

Osserviamo che al risultato ottenuto si può dare la forma seguente:

Una forma ternaria quadratica

$$\sum_{ik}^{1..3} a_{ik} x_i x_k$$

può sempre ridursi con una sostituzione ortogonale (1)

---

(1) Una sostituzione lineare omogenea sopra un numero qualunque di variabili dicesi ortogonale se cangia la somma dei quadrati delle antiche variabili nella somma dei quadrati delle nuove.

$$x_i = \sum_k^{1..3} c_{ik} y_k \quad (i = 1,2,3)$$

delle variabili a somme di quadrati

$$\rho_1 y_1^2 + \rho_2 y_2^2 + \rho_3 y_3^2.$$

Lo stesso teorema vale nel caso di una forma quadratica in un numero qualunque n di variabili e i coefficienti dei quadrati nella forma ridotta sono appunto le radici della equazione secolare.

"§ 156."

Equazioni normali delle quadriche a centro.

Servendoci dei resultati fondamentali stabiliti nei §§ precedenti, andiamo ora a ridurre le equazioni delle quadriche a certe forme speciali semplici (forme normali) sulle quali sarà poi facile riconoscere la forma della superficie.

Cominciamo dal far rotare gli assi coordinati ortogonali attorno all'origine fino a sovrapporli alla terna (o ad una terna) di direzioni principali. L'equazione della qua-

drica assumerà, per quanto abbiamo visto al § precedente, la forma:

$$(23) \qquad \rho_1 x^2+\rho_2 y^2+\rho_3 z^2+2a'_{14}x+2a'_{24}y+2a'_{34}z+a_{44}=0,$$

dove $\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ sono le radici della equazione cubica, i nuovi coefficienti dei termini lineari che avranno cangiato di valore sono indicati con $a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}$ ed il termine noto sarà rimasto lo stesso.

Conviene ora distinguere secondo che la quadrica è a centro ($A_{44} \neq 0$), ovvero priva di centro ($A_{44}=0$). Trattiamo in questo e nel seguente § il primo caso; trasportiamo allora con una traslazione degli assi, l'origine delle coordinate nel centro. Precisamente come per le coniche (§ 116), si vede che: <u>Quando il centro della quadrica è nell'origine mancano nella equazione della quadrica i termini lineari; e viceversa</u>.

Eseguita la detta traslazione degli assi, i coefficienti di termini di 2° grado rimarranno gli stessi, i termini lineari spariranno e cangerà il termine noto il cui nuovo valore indicheremo con a'_{44}. L'equazione della quadrica diventerà adunque

$$(24) \qquad \rho_1 X^2+\rho_2 Y^2+\rho_3 Z^2+a'_{44}=0.$$

Del resto eseguiamo direttamente la trasformazione della (23) nella (24) osservando che nel caso attuale delle quadriche a centro: essendo $A_{44} \neq 0$ nessuna delle tre radici della equazione cubica (I*) è nulla poichè pel loro prodotto $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ si ha

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = A_{44}.$$

Ora se nella (23) poniamo

$$x = X + \alpha\,, \quad y = Y + \beta\,, \quad z = Z + \gamma$$

indi prendiamo α, β, γ in guisa che sia

$$\rho_1 \alpha + a'_{14} = 0\,, \quad \rho_2 \beta + a'_{24} = 0\,, \quad \rho_3 \gamma + a'_{34} = 0,$$

cioè

$$\alpha = -\frac{a'_{14}}{\rho_1}\,, \quad \beta = -\frac{a'_{24}}{\rho_2}\,, \quad \gamma = -\frac{a'_{34}}{\rho_3}\,,$$

riduciamo appunto la (23) alla forma (24).

Diremo la (24) l'equazione ridotta delle quadriche a centro, dove converrà ancora calcolare il quarto coefficiente tuttora incognito a'_{44}. Questo si fa subito, ricordando che il determinante della quadrica non muta per cangiamento di assi ortogonali. Ora nella (24) il discriminante è

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot a'_{44} = A_{44} \cdot a'_{44}\,;$$

dunque

$$a'_{44} = \frac{\Delta}{A_{44}}$$

e la forma definitiva dell'equazione ridotta è adunque

$$\text{(III)} \qquad \rho_1 X^2 + \rho_2 Y^2 + \rho_3 Z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0$$

Così abbiamo il risultato finale:

Se per una quadrica a centro, già riferita ad assi cartesiani ortogonali, si cambiano gli assi assumendo per nuova origine il centro e come direzioni degli assi quelle della terna (di una terna) ortogonale di direzioni principali, l'equazione assume la forma ridotta (III), dove ρ_1, ρ_2, ρ_3 significano le radici della equazione cubica $D(\rho) = 0$.

Ora vogliamo osservare che, rinunziando all'ortogonalità degli assi coordinati, si può in infiniti modi dare all'equazione della quadrica la forma semplice (III) coi soli quadrati e col termine noto.

Se adoperiamo infatto dapprima coordinate cartesiane omogenee $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ ed assumiamo come tetraedro fondamentale un tetraedro autoconiugato (§148) il cui vertice A_4 cada nel centro e quindi la faccia opposta $x_4 = 0$ sia il

piano all'infinito, l'equazione della quadrica assumerà la forma

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0,$$

ossia, in coordinate non omogenee, appunto

$$(25) \qquad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 = 0.$$

La terna di attuali assi O_{xyz} dicesi una terna di diametri coniugati, poichè in generale diconsi coniugati due diametri quando il piano diametrale coniugato alla direzione dell'uno passa per l'altro, ossia quando il loro piano produce nella quadrica una sezione centrale di cui quei due diametri formano una coppia di diametri coniugati. È evidente che esistono ∞^3 terne di diametri coniugati, e prendendo una qualunque di queste come terna di assi coordinati, l'equazione della quadrica prende la forma semplificata (25). Inversamente se l'equazione ha questa forma la terna degli assi coordinati è costituita di tre diametri due a due coniugati.

Come si vede la terna delle direzioni principali (uscenti dal centro) è l'unica terna ortogonale di diametri coniugati.

§ 157.
Criteri distintivi per le varie specie di quadriche a centro.

Ponendo

$$H = -\frac{\Delta}{A_{44}},$$

scriviamo l'equazione ridotta della quadrica a centro

$$(26) \qquad \rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = H$$

e supponiamo dapprima $H \neq 0$ ossia $\Delta \neq 0$, cioè la quadrica irriducibile. Osserviamo che, cangiando tutti i segni nell'equazione della quadrica, H cangia segno e per ciò, essendo $H \neq 0$, si può supporre senz'altro $H > 0$.

L'equazione del cono che dal centro projetta la conica all'infinito è data da (§ 151)

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 0;$$

questo cono non è altro che quello delle tangenti uscenti dal centro; cioè il cono circoscritto dal centro, e dicesi cono assintoto, una qualunque sezione centrale avendo evidentemente per assintoti le due generatrici del cono nel suo piano. Dal

specie della quadrica dipende essenzialmente (§ 151) dalla natura del cono assintoto; ovvero un **ellissoide** se questo cono è immaginario, cioè se le tre radici

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3$$

dell'equazione cubica (nessuna delle quali è nulla) hanno il medesimo segno, un **iperboloide** se il segno di una è opposto a quello delle altre due. Ma per suddistinguere le varie specie conviene inoltre aver riguardo all'equazione (26) della quadrica che scriviamo

$$(26^*) \qquad \frac{x^2}{\frac{H}{\rho_1}} + \frac{y^2}{\frac{H}{\rho_2}} + \frac{z^2}{\frac{H}{\rho_3}} = 1.$$

Le tre quantità

$$\frac{\rho_1}{H}, \frac{\rho_2}{H}, \frac{\rho_3}{H}$$

possono offrire rispetto ai segni i casi seguenti

1°. tutti tre positivi
2°. tutti tre negativi
3°. due positivi, uno negativo
4°. due negativi, uno positivo.

Nei due primi casi il cono assintoto è immaginario e la superficie è un ellissoide, però solo nel 1° caso la quadrica (26*) è reale,

nel 2° immaginaria).

Nei due ultimi casi il cono assintoto è reale e la quadrica è un iperboloide; ma nel 3° caso abbiamo $\Delta > 0$ quindi un iperboloide ad una falda (iperboloide rigata), nel 4° caso invece $\Delta < 0$ e l'iperboloide è a due falde.

Denominando opportunamente gli assi, possiamo supporre che nei due ultimi casi la successione dei segni nei tre rapporti

$$\frac{\rho_1}{H},\ \frac{\rho_2}{H},\ \frac{\rho_3}{H}$$

sia

$$+ \quad + \quad - \quad \text{nel 3° caso}$$

$$- \quad - \quad + \quad \text{nel 4° caso;}$$

allora la specie della quadrica a centro si riconoscerà dalla tabella seguente

$\frac{\rho_1}{H}$	$\frac{\rho_2}{H}$	$\frac{\rho_3}{H}$	
+	+	+	ellissoide reale
−	−	−	ellissoide immaginario
+	+	−	iperboloide ad una falda
−	−	+	iperboloide a due falde

Basta dunque l'ispezione dei segni delle tre radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 dell'equazione cubica per riconoscere la specie della quadrica. E siccome l'equazione è a radici reali; dalla regola dei segni di Cartesio abbiamo:

Il numero delle radici positive dell'equazione cubica ((I*) § 152) $D(\rho)=0$ eguaglia il numero delle variazioni di segno nella successione dei suoi coefficienti.

Indicando con a, b, c tre quantità reali e positive, potremo porre ordinatamente nei quattro casi riassunti nella tabella:

$$\frac{H}{\rho_1}=a^2,\ \frac{H}{\rho_2}=b^2,\ \frac{H}{\rho_3}=c^2 \qquad \text{nel 1° caso}$$

$$\frac{H}{\rho_1}=-a^2,\ \frac{H}{\rho_2}=-b^2,\ \frac{H}{\rho_3}=-c^2 \qquad \text{nel 2° "}$$

$$\frac{H}{\rho_1}=a^2,\ \frac{H}{\rho_2}=b^2,\ \frac{H}{\rho_3}=-c^2 \qquad \text{nel 3° "}$$

$$\frac{H}{\rho_1}=-a^2,\ \frac{H}{\rho_2}=-b^2,\ \frac{H}{\rho_3}=c^2 \qquad \text{nel 4° "}$$

Le corrispondenti equazioni delle quadriche a centro si diranno le equazioni normali di queste. Esse si scrivono dunque:

./.

(A) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ellissoide reale.

(A*) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+1=0$ ellissoide immaginario

(B) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ iperboloide ad una falda

(B*) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ iperboloide a due falde.

Si osserverà che le equazioni dei due iperboloidi (come anche quelle dei due iperboloidi) vengono così scritte in guisa da avere comune il caso asintotico

(C) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

La quantità a, b, c sono i così detti semiassi della quadrica. Per calcolarli occorre naturalmente la risoluzione effettiva dell'equazione cubica, o piuttosto il calcolo numerico delle sue radici.

Per terminare colla riduzione a forma normale della equazione delle quadriche a centro, altro non resta che a considerare il caso del cono ove $\Delta = 0$. L'equazione normale del

no quadrico (riferito al vertice ed alle direzioni principali) diventa

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 0$$

e il cono è reale od immaginario secondochè una delle tre radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 ha segno opposto alle altre due ovvero hanno tutte il medesimo segno/. L'equazione di un cono quadrico reale si può dunque sempre scrivere sotto la forma (C). Le sezioni piane fatte coi piani $z = \text{cost}^e$ sono ellissi (simili) coi centri sull'asse $\underline{z}$ e cogli assi diretti secondo gli altri due assi coordinati.

La forma più generale di un cono quadrico è dunque quella di un cono che proietta un'ellisse da un punto situato sulla perpendicolare nel centro al piano dell'ellisse. Vedremo poi che sopra il cono esistono due serie di sezioni circolari (Cap. XV) sicchè: <u>La forma più generale di un cono di secondo grado è quella di un cono circolare obliquo</u>.

§ 158.

Equazioni normali delle quadriche prive di centro (paraboloidi)

Supponiamo ora la quadrica priva di centro, cioè $A_{44}=0$; allora una delle radici della equazione cubica $D(\varsigma)$ sarà nulla e sia la $\varsigma_3=0$. La prima parte della trasformazione del § 156 potrà ancora compiersi come per le quadriche a centro, orientando gli assi secondo le direzioni principali, e l'equazione della quadrica diventerà la (23) con $\varsigma_3=0$, cioè

$$(24)\qquad \varsigma_1 x^2+\varsigma_2 y^2+2a'_{14}x+2a'_{24}y+2a'_{34}z+a_{44}=0.$$

Il discriminante Δ della quadrica è dato da

$$(25)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\varsigma_1 & 0 & 0 & a'_{14}\\ 0 & \varsigma_2 & 0 & a'_{24}\\ 0 & 0 & 0 & a'_{34}\\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a_{44}\end{vmatrix}=-a'^2_{34}\varsigma_1\varsigma_2 ;$$

e se trattiamo dapprima di quadriche irriducibili (paraboloidi) essendo $\Delta\neq 0$, avremo

$$a'_{34}\neq 0,\ \varsigma_1\neq 0,\ \varsigma_2\neq 0.$$

Cangiando nella (27) x, y in

$$x = X + \alpha \ , \quad y = Y + \beta \ [1]$$

e prendendo come al § 158 α, β in guisa che sia

$$\rho_1 \alpha + a'_{14} = 0 \ , \quad \rho_2 \alpha + a'_{24} = 0$$

faremo sparire dalla (27) i termini lineari in X, Y e la (27) diventerà

$$(27^*) \qquad \rho_1 X^2 + \rho_2 Y^2 + 2 a'_{34} z + a'_{44} = 0.$$

Infine trasportando l'origine nel punto

$$\left(0, 0, -\frac{a'_{44}}{2a'_{34}}\right)$$

ove l'asse z incontra la quadrica, cioè ponendo

$$z = Z - \frac{a'_{44}}{2a'_{34}}$$

la (27*) acquisterà la forma ridotta

$$(29) \qquad \rho_1 X^2 + \rho_2 Y^2 + 2 a'_{34} Z = 0$$

dove, a causa della (28), avremo anche subito il valore di a'_{34} dato da

$$(30) \qquad a'_{34} = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{\rho_1 \rho_2}}.$$

---

(1) Con ciò si trasporta l'origine nel punto $(\alpha, \beta, 0)$

Il segno del radicale si può qui assumere a volontà, dipendentemente dalla direzione positiva assegnata all'asse Z_1.

Si noti che, siccome il valore di a'_{34} è certamente reale, le radici ς_1, ς_2 avranno lo stesso segno per $\Delta < 0$ cioè pel paraboloide ellittico e segno contrario per $\Delta > 0$ cioè pel paraboloide iperbolico.

Distinguendo questi due casi ed indicando con p, q due quantità positive, potremo quindi scrivere le <u>equazioni normali</u> dei due paraboloidi sotto la forma

$$(D)\quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ : \ \text{\underline{paraboloide} \underline{ellittico}} \ (\underline{\Delta} < 0)$$

$$(D^*)\quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ : \ \text{\underline{paraboloide} \underline{iperbolico}} \ \underline{\Delta > 0}.$$

Se si rinunzia all'ortogonalità degli assi coordinati, facilmente si vede che in l'infiniti modi si può porre l'equazione di un paraboloide sotto questa forma ridotta (D) o (D^*). Basta perciò: 1° prendere per origine O un punto sul paraboloide, 2° prendere per asse Oz il diametro per O (la direzione principale corrispondente alla radice semplice $\varsigma_3 = 0$), 3° assumere per assi Ox, Oy due tangenti coniugate in O. Nel caso particolare delle equazioni normali O è il <u>vertice</u> del paraboloi-

Oz l'asse.

Per completare le cose precedenti conside-riamo ora il caso prima escluso $\Delta = 0$, ove essendo pure $A_{44} = 0$ la quadrica (supposta non degenere) sarà un cilindro. Per vedere di quale specie sarà il cilindro si osservi che l'equazione della sezione col piano all'infinito è

$$\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2 = 0$$

e si compone dunque di due rette immaginarie, se ρ_1, ρ_2 hanno lo stesso segno, di due rette reali distinte se ρ_1, ρ_2 hanno segno contrario, in fine di due rette coincidenti se una delle due radici $\rho_1 \rho_2$ è $= 0$. Concludiamo: <u>Nel caso $\Delta = 0$, $A_{44} = 0$ la quadrica è un cilindro ellittico (reale od immaginario) od un cilindro iperbolico se la radice nulla della equazione cubica $D(\rho) = 0$ è semplice, un cilindro parabolico se la radice nulla è doppia</u>.

"§ 159"

Tabella riassuntiva delle varie specie di quadriche non degeneri

Riassumiamo i risultati della discus-

sione delle varie specie di quadriche (non degeneri) compiuta nei §§ precedenti nella tabella seguente:

Quadriche irriducibili $\Delta \neq 0$

$A_{44} \neq 0$ - Quadriche a centro

$\frac{S_1}{H}$	$\frac{S_2}{H}$	$\frac{S_3}{H}$	$\left(H = -\frac{\Delta}{A_{44}}\right)$
+	+	+	ellissoide reale $\Delta < 0$
−	−	−	ellissoide immaginario $\Delta > 0$
+	+	−	iperboloide ad una falda $\Delta > 0$
−	−	+	iperboloide a due falde $\Delta < 0$

$A_{44} = 0$ Quadriche prive di centro
- $\Delta < 0$ paraboloide ellittico
- $\Delta > 0$ paraboloide iperbolico

Quadriche riducibili $\Delta = 0$

$A_{44} \neq 0$
- cono reale se S_1, S_2, S_3 non hanno lo stesso segno
- cono immaginario se S_1, S_2, S_3 hanno egual segno

$$A_{44} = 0 \begin{cases} \rho_1 \rho_2 > 0 \text{ cilindro ellittico (reale o immaginario} \\ \rho_1 \rho_2 < 0 \text{ cilindro iperbolico} \\ \rho_1 \rho_2 = 0 \text{ cilindro parabolico} \end{cases}$$

— Capitolo 15° —

Descrizione della forma delle cinque specie di quadriche - Proprietà delle quadriche a centro.

§ 160

Quadriche di rotazione

Andiamo ora ad esaminare, sulle equazioni normali (A), (B), (B*), (D), (D*) delle cinque specie di quadriche, la loro forma rispettiva. Ma prima ci vogliamo trattenere sopra il caso particolare che l'equazione cubica $D(\rho)=0$ abbia una radice doppia, escludendo il caso considerato sopra, che questa radice doppia sia nulla; in questo caso sappiamo già che la quadrica è un cilindro parabolico.

Se nella equazione ridotta (26) delle quadriche a centro, ovvero in quella (29) dei paraboloidi, supponiamo $\rho_1=\rho_2$, l'equazione prende la forma

(1) $$\rho_1(x^2+y^2)+\rho_3 z^2=H,$$

ovvero l'altra

(2) $$\varsigma_1(x^2+y^2)+2a'_{34}z=0.$$

In ogni caso, avendo questa la forma (§148)

$$x^2+y^2=f(z),$$

vediamo: Se l'equazione cubica $D(\varsigma)=0$ possiede una radice semplice ed una doppia (non nulla) la quadrica è di rotazione attorno all'asse la cui direzione (principale) corrisponde alla radice semplice.

La forma della quadrica di rotazione si desume immediatamente da quella della sua curva meridiana. Per le quadriche a centro (1) la curva meridiana è un'ellisse od un'iperbola secondo che ς_1, ς_2 hanno lo stesso segno o segno contrario. L'asse di rotazione (che prendiamo per asse delle z) può essere l'asse primario (focale) ovvero l'asse secondario, onde quattro forme di quadriche a centro di rotazione e cioè:

1° ellissoide allungato, generato dal rotare di un'ellisse attorno al suo asse maggiore. L'equazione di questa quadrica può scriversi

α) $$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1. \quad (a>b)$$

2° ellissoide schiacciato, generato dal rotare di un ellisse attorno all'asse minore, coll'equazione.

$$\beta) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad (a>b).$$

3° iperboloide a due falde, generato dal rotare di un'iperbola attorno all'asse trasverso, coll'equazione

$$\gamma) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Qui evidentemente i due rami dell'iperbola generano, ciascuno per sè, una falda della superficie, onde il nome della quadrica.

4° iperboloide ad una falda, generato dal rotare dell'iperbola attorno all'asse secondario, coll'equazione

$$\delta) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

In questo caso dopo un giro di π attorno all'asse di rotazione, un ramo dell'iperbola si sovrappone all'altro e la superficie è costituita di un'unica falda che si estende da tutte le parti all'infinito.

Per le quadriche prive di centro (2),

abbiamo un'unica forma, quella del paraboloide di rotazione generato dal rotare della parabola attorno al suo asse. L'equazione della superficie è

$$\varepsilon) \qquad x^2 + y^2 = 2pz.$$

Queste forme di quadriche sono casi particolari delle quadriche generali delle quattro prime specie ed erano già note agli antichi (Archimede) eccetto l'iperboloide ad una falda che venne considerato da Wren (1699).

La prima classificazione delle quadriche generali e la descrizione della loro forma è dovuta ad Eulero che applicò i metodi della geometria analitica.

"§161"

Sfera - Circolo immaginario all'infinito e definizione projettiva dell'angolo

La più semplice forma di quadrica di rotazione è la sfera, che è superficie di rotazione attorno a qualunque suo diametro.

L'equazione di una qualunque

sfera è

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2;$$

e se ne scriviamo l'equazione in coordinate (orto-gonali) omogenee

$$(x_1-\alpha x_4)^2+(x_2-\beta x_4)^2+(x_3-\gamma x_4)^2=r^2x_4^2$$

vediamo che la sua sezione col piano all'infinito è la conica

$$(3) \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.$$

Questa è affatto indipendente dalla particolare sfera considerata e dicesi il circolo immaginario all'infinito od anche il circolo assoluto.

Si vede adunque che: Tutte le sfere dello spazio hanno a comune il circolo immaginario all'infinito.

Viceversa ogni quadrica che passi per il circolo assoluto è una sfera.

Si può anche dire che tutte le sfere concentriche, p. e. col centro nell'origine, hanno a comune il cono assintotico

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

che si dice il cono isotropo ed è il luogo delle rette isotrope (cicliche) esistenti nel centro.

Il circolo assoluto viene incontrato da ogni piano π nei due punti ciclici di π ed è quindi il luogo di tutti i punti ciclici

dei piani dello spazio.

La considerazione del circolo assoluto è di importanza fondamentale (come già quella dei punti ciclici nel piano (§ 88)) per la trasformazione delle proprietà metriche angolari in proprietà proiettive. Tale trasformazione si fa in base alle osservazioni seguenti:

1° Consideriamo una direzione nello spazio fissata dai relativi coseni ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Le coordinate della traccia di questa direzione sul piano all'infinito sono (§ 149 formole (8*))

$$x_1' = \cos\alpha, \quad x_2' = \cos\beta, \quad x_3' = \cos\gamma, \quad x_4' = 0.$$

Pel punto all'infinito di una seconda direzione ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) avremo

$$x_1'' = \cos\alpha', \quad x_2'' = \cos\beta', \quad x_3'' = \cos\gamma', \quad x_4'' = 0$$

e se supponiamo le due direzioni ortogonali avremo quindi

$$x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + x_3' x_3'' = 0.$$

Ora questa esprime che sul piano $x_4 = 0$ i due punti $(x_1' x_2' x_3')$, $(x_1'' x_2'' x_3'')$ sono coniugati rispetto alla conica assoluta (3).

Dunque: <u>Affinchè due rette nello spazio siano ortogonali è necessario e sufficiente che le loro tracce sul piano all'infinito siano due punti coniugati rispetto al circolo assolu-</u>

Fol.

Ancora consideriamo un piano di equazione normale

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p;$$

la sua traccia sul piano all'infinito è la retta

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + x_3 \cos\gamma = 0$$

ossia

$$x_1' x_1 + x_2' x_2 + x_3' x_3 = 0,$$

che è la retta polare del punto $(x_1' x_2' x_3')$ rispetto al circolo assoluto. Vediamo quindi che: Un piano ed una retta sono fra loro perpendicolari quando sul piano all'infinito la traccia del piano è la retta polare rispetto all'assoluto del punto traccia della retta, teorema che del resto è una facile conseguenza del precedente.

Così pure: Due piani sono fra loro perpendicolari se le loro traccie sul piano all'infinito sono rette coniugate, rispetto all'assoluto.

La relazione d'ortogonalità è per tal modo ricondotta ~~ad~~ a una relazione di natura projettiva. Ma si può procedere oltre e ricondurre la nozione della misura di

un angolo generale ad una nozione proiettiva.

Siano $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ due direzioni, e θ il loro angolo, sicchè

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Consideriamo i due punti P, P' tracce di queste due direzioni sul piano all'infinito, e cerchiamo le coordinate x_1, x_2, x_3 di uno dei due punti A, B, ove la loro congiungente sega l'assoluto (3). Avremo

$$x_1 = \lambda\cos\alpha + \mu\cos\alpha', \quad x_2 = \lambda\cos\beta + \mu\cos\beta'$$
$$x_3 = \lambda\cos\gamma + \mu\cos\gamma',$$

e sostituendo nella (3) otteniamo per determinare il rapporto incognito $\frac{\lambda}{\mu}$ l'equazione di 2° grado:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cos\theta + 1 = 0,$$

colle due radici

$$t_1 = -e^{i\theta}, \quad t_2 = -e^{-i\theta}.$$

Indicando dunque con M il birapporto $(PP'AB)$ abbiamo

$$M = (\infty, 0, t_1, t_2) = \frac{t_2}{t_1} = e^{-2i\theta},$$

da cui

$$(4) \qquad \theta = \frac{i}{2} \log . M .$$

Vediamo così che: l'angolo di due rette nello spazio si ottiene moltiplicando per $\frac{i}{2}$ il logaritmo del birapporto che le loro due tracce sul piano all'infinito formano coi due punti d'intersezione della loro congiungente coll'assoluto.

§162
Ellissoide a tre assi ineguali.

Volendo ora discutere la forma delle quadriche generali, cominciamo dal premettere le osservazioni seguenti.

Consideriamo in una quadrica qualunque una serie di sezioni fatte con piani paralleli, p. e. con piani paralleli al piano xy. Combinando l'equazione $z = h$ di un tale piano coll'equazione (generale) di una quadrica, otteniamo

$$(5) \quad a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2(a_{13} h + a_{14}) x + 2(a_{23} h + a_{24}) y + a_{33} h^2 + 2 a_{34} h + a_{44} = 0 ,$$

che rappresenta sul piano xy la projezione della conica sezione effettiva projettata su questo piano parallelamente all'asse Oz e differisce da questa solo per una traslazione, d'ampiezza $= h$, secondo la direzione Oz. Al variare di $\underline{h}$ non variano i termini di <u>2° grado</u> nella (6), onde resulta (§ 158) che le sezioni fatte con piani paralleli nella quadrica hanno gli assi paralleli, e sono quindi generalmente coniche simili e similmente disposte, salvo nel caso iperbolico ove può essere anche una delle due iperbole simile (e similmente disposta) alla coniugata dell'altra. Di più il luogo dei centri di queste sezioni è una retta e precisamente il diametro coniugato alla giacitura dei piani paralleli. (Geometricamente ciò risulta dalle proprietà generali osservate al § 146, giacchè i centri delle sezioni fatte con piani paralleli sono sulla retta coniugata alla retta all'infinito comune a quei piani; e questa è appunto il diametro coniugato a quella giacitura.)

Analiticamente dall'osservare che se si prende l'asse delle $\underline{z}$ nella direzione del diametro coniugato alla giacitura del piano xy, l'equazione del piano diametrale co=

ningato alla direzione dell'asse delle z essendo in generale (per la (9) § 149)

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{43} = 0,$$

dovremo avere $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$; e le coniche (5) hanno allora il centro a comune.

Premesse queste osservazioni generali, veniamo a considerare l'ellissoide generale rappresentato dall'equazione

$$(A) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Escludiamo ora il caso che due delle quantità a, b, c siano eguali fra loro, perchè avremmo il caso già sopra discusso di un ellissoide di rotazione. Con opportuna denominazione degli assi, potremo supporre e supporremo che sia

$$a > b > c.$$

La forma (A) dell'equazione dimostra che per ogni punto reale della superficie si deve avere

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c;$$

la superficie, limitata di forma, giace dunque tutta entro il parallelepipedo rettangolo racchiuso dai 6 piani

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c.$$

Questi incontrano gli assi nei 6 pun-

ti

$$A \equiv (a, 0, 0) \qquad A' \equiv (-a, 0, 0)$$
$$B \equiv (0, b, 0) \qquad B' \equiv (0, -b, 0)$$
$$C \equiv (0, 0, c) \qquad C' \equiv (0, 0, -c),$$

che sono i vertici dell'ellissoide; le lunghezze

$$A'A = 2a, \quad B'B = 2b, \quad C'C = 2c$$

sono quelle degli assi dell'ellissoide.

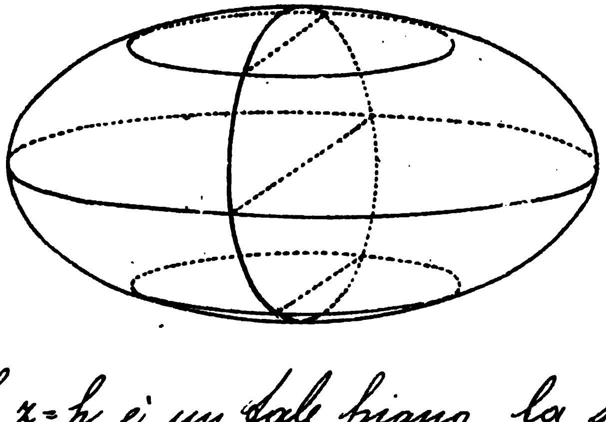
I tre piani principali tagliano l'ellissoide secondo le tre ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{nel piano } xy$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{nel piano } xz$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{nel piano } yz,$$

le quali diconsi le ellissi principali, i loro rispettivi semiassi sono (a, b), (a, c), (b, c).



Per intendere la forma della superficie basta considerare p. e. la serie di sezioni con piani paralleli al piano xy. Se $z = h$ è un tale piano, la sezione dell'ellissoi-

de projettata ortogonalmente sul piano xy, ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

che rappresenta un'ellisse (reale solo per $|h|<c$) cogli assi stessi della ellisse principale e colle lunghezze

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ ,\quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

per i semiassi. Conformemente alle osservazioni generali, vediamo dunque che la sezione obbiettiva è un'ellisse col centro sull'asse Oz e cogli assi principale e secondario diretti sempre secondo le direzioni Ox, Oy e proporzionali, in lunghezza, a quelli dell'ellisse principale stessa.

Possiamo quindi immaginare l'ellissoide generato nel modo seguente. In un piano qualunque parallelo al piano xy, e distante da questo meno di c, tracciamo un'ellisse che abbia il centro sull'asse Oz, gli assi diretti secondo Ox, Oy ed i vertici rispettivamente sulle altre due ellissi principali

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

il luogo di questa ellisse mobile è l'ellissoide.

Come già si è osservato geometricamente al §151, tutte le sezioni piane dell'ellissoide sono ellissi. Per confermare analiticamente la cosa prendiamo l'equazione di un qualunque piano dello spazio, che risoluta p. e. rapporto alla z [1] scriviamo

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Eliminando z fra questa e l'equazione della quadrica abbiamo

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1,$$

che rappresenta la projezione ortogonale della conica sezione sul piano xy ed è quindi della medesima specie. Ora la (6) rappresenta sempre un'ellisse perchè essendo qui

$$a_{11} = \frac{1}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2}$$

$$a_{12}' = \frac{\alpha\beta}{c^2}$$

risulta

---

(1) Se l'equazione del piano non contenesse la z si risolverebbe rapporto ad x o ad y.

$$A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{\alpha^2}{b^2 c^2} + \frac{\beta^2}{a^2 c^2} > 0.$$

§ 163

Ellissoide generale come derivato da un ellissoide di rotazione

Si può far derivare l'ellissoide generale dall'ellissoide di rotazione in un modo tanto più notevole in quanto che si può applicare egualmente alle altre specie di quadriche eccettuato il paraboloide iperbolico (1)

Prendiamo un ellissoide di rotazione, la cui equazione scriviamo

$$(1). \quad \frac{x^2 + y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2} = 1;$$

se $p > q$ esso sarà un ellissoide schiacciato, quando $p < q$ un ellissoide allungato ed infine nel caso $p = q$ avremo una sfera di rag=

---

(1) Le proprietà che seguono nel testo sono quelle che si utilizzano nel costruire i modelli di cartone delle quadriche, ponendone in evidenza le sezioni circolari.

gio p. Considerando tutti i paralleli della superficie, supponiamoli mobili attorno al rispettivo centro e disponiamo i loro piani ancora tutti paralleli fra loro ma obliqui all'asse. Dimostriamo che il luogo delle nuove posizioni dei circoli è sempre un ellissoide, ma ad assi ineguali, e disponendo convenientemente di p, q e dell'angolo ω d'inclinazione dell'asse (luogo dei centri) sui piani dei circoli, si può avere così un ellissoide qualunque prefissato. Per la superficie luogo dei circoli, nelle loro nuove posizioni, prendiamo sempre come assi gli assi Ox, Oy trasportati col primo circolo, e l'asse Oz luogo dei centri. È chiaro che ogni punto dell'ellissoide primitivo conserva, dopo la trasformazione, le stesse coordinate di prima ma solo riferite ai nuovi assi. Perciò la (7) è ancora la nuova equazione del luogo cercato, ma degli assi attuali solo Ox, Oy sono ortogonali mentre Oz è obliquo ai primi due. Così vediamo intanto che la superficie si conserva sempre un ellissoide, come si era asserito e solo resta da calcolarne i semiassi a, b, c. Per semplificare il calcolo, osservia-

mo che si può supporre ancora Oz ortogonale ad Oy, girando convenientemente gli assi Ox, Oy attorno ad O nel piano del primo circolo.

L'inclinazione ω di Oz sui piani dei circoli sarà allora l'angolo $x\hat{z}$. Trasformiamo ora la (7), attualmente in assi obliqui, in assi ortogonali cangiando solo l'asse Oz nel nuovo OZ normale al piano $x\hat{y}$. Le formole di trasformazione si avranno dalla (13) §15; esse si scrivono

$$x = X - \cot\omega\, Z$$

$$z = \frac{Z}{\operatorname{sen}\omega}, \quad y = Y$$

e la nuova equazione dell'ellissoide (7) sarà quindi

$$\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{p^2} + \left(\frac{\cos^2\omega}{p^2\operatorname{sen}^2\omega} + \frac{1}{q^2\operatorname{sen}^2\omega}\right)Z^2 - \frac{2\cot\omega}{p^2}XZ = 1.$$

Gli attuali assi X, Y, Z essendo ortogonali, calcoliamo l'equazione normale

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 1$$

dell'ellissoide, calcolando le radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 dell'equazione cubica:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p^2}-\rho & 0 & -\frac{\cot\omega}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p^2}-\rho & 0 \\ -\frac{\cot\omega}{p^2} & 0 & \frac{\cot^2\omega}{p^2}+\frac{1}{q^2\operatorname{sen}^2\omega}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Una di queste, che indicheremo con ρ_2, è evidentemente

$$\rho_2=\frac{1}{p^2},$$

e le altre due saranno le radici dell'equazione di 2° grado

$$\rho^2-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)\rho+\frac{1}{p^2q^2\operatorname{sen}^2\omega}=0$$

Indicandole con $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{c^2}$ rispettivamente avremo

$$(8)\qquad \begin{cases} a^2+c^2=p^2+q^2 \\ a^2c^2=p^2q^2\operatorname{sen}^2\omega \end{cases}$$

e supponendo, come è lecito, $a^2>c^2$ si vedrà subito che

$$a^2>p^2>c^2.$$

Ponendo ulteriormente $b=p$, il nostro ellissoide avrà dunque i semiassi

$$a,\ b,\ c,$$

essendo il semiasse medio $b = p$ e i due estremi determinati dalle (8). Così: Variando l'inclinazione dei piani paralleli agli assi, il luogo dei circoli si mantiene sempre un ellissoide di semiasse medio $b = p$, rimanendo costante la somma dei quadrati degli estremi $a^2 + c^2$.

Da queste formole vediamo ora facilmente che qualunque ellissoide a semiassi ineguali a, b, c può generarsi in questo modo. Presi infatti ad arbitrio a, b, c (con $a > b > c$) basterà prendere secondo le (8):

$$(9) \quad \begin{cases} p = b \quad q = \sqrt{a^2+c^2-b^2} \\ \operatorname{sen} \omega = \dfrac{ac}{b\sqrt{a^2+c^2-b^2}} \end{cases}$$

dove è da notarsi che avremo per ω un valore reale (che si può prendere fra 0 e $\frac{\pi}{2}$) poichè

$$1 - \frac{a^2c^2}{b^2(a^2+c^2-b^2)} = \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^2(a^2+c^2-b^2)}.$$

Alla terza delle (9*) va quindi associata l'altra

$$(9^*) \qquad \cos\omega = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{b\sqrt{a^2+c^2-b^2}}.$$

In fine osserviamo che l'ellissoide di rotazione (7), da cui facciamo così derivare l'ellissoide generale, sarà schiacciato od allungato secondo

che

$$a^2 + c^2 < 2b^2 \quad \text{o} \quad a^2 + c^2 > 2b^2.$$

Nel caso intermedio $a^2 + c^2 = 2b^2$ l'Ellissoide deriva, nel modo indicato, dalla sfera.

§ 164.

Sezioni circolari e punti circolari nell'ellissoide

Risulta già da quanto abbiamo visto nel § precedente che l'ellissoide generale ammette delle sezioni circolari e che quel piano di sezione circolare che passa per il centro contiene l'asse medio dell'ellissoide.

A causa della simmetria dell'ellissoide rispetto ai piani principali, anche il piano simmetrico di quello sopra considerato, rispetto p. e. al piano xy, produrrà una sezione circolare e quindi tutti i piani paralleli a questo produrranno ancora per sezioni dei circoli. L'esistenza di questo doppio sistema di circoli sull'ellissoide generale si deduce anche dalle semplici considerazioni geometriche seguenti. Nell'ellisse principale

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

del semiasse massimo e minimo a, c esistono evidentemente due diametri eguali in lunghezza all'asse medio 2b, e simmetrici rispetto agli assi. Se per uno qualunque di questi diametri e per l'asse medio si conduce un piano, la sezione prodotta nell'ellissoide avrà per assi il detto diametro e l'asse medio; dunque, avendo i due semiassi = b, sarà un circolo di raggio b.

È facile vedere che non esistono altri circoli (reali) sull'ellissoide oltre quelli dei due sistemi sopra considerati. Supposto infatti di avere sull'ellissoide un tale circolo, ne esisterebbe pure uno in un piano parallelo per il centro. Prendendo per asse Oz il diametro coniugato a questo piano, ed una coppia qualunque ortogonale di assi Ox, Oy nello stesso piano, avremmo in Ox, Oy, Oz una terna di diametri coniugati e l'equazione dell'ellissoide avrebbe quindi la forma

$$\frac{x^2+y^2}{p^2}+\frac{z^2}{q^2}=1.$$

Ma allora le considerazioni del § precedente dimostrano che si ha $p=b$ ed il piano

centrale supposto passa necessariamente per l'asse medio; onde coincide con uno dei due sopra considerati.

In ciascuna serie di sezioni circolari il luogo dei centri dei circoli è il diametro coniugato al piano del circolo centrale ed incontra l'ellissoide in due punti diametralmente opposti che sono punti circolari dell'ellissoide, essendo ivi il piano tangente parallelo ai piani delle sezioni circolari (§ 147). Vi sono dunque sull'ellissoide quattro punti circolari. Determiniamo le coordinate di questi punti, la cui considerazione è della massima importanza per lo studio delle proprietà metriche delle figure tracciate sulla superficie ellissoidica.

Scriviamo per ciò dapprima l'equazione dei piani centrali che producono sezioni circolari nell'ellissoide. L'equazione di un tale piano, che passa per l'asse delle y, sarà

$$z = m\,x$$

onde per uno dei suoi punti d'incontro (x, z) coll'ellisse principale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ovvero

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}\right)x^2=1.$$

D'altronde deve essere $x^2+z^2=b^2$ e quindi

$$(1+m^2)\,x^2=b^2$$

ed eliminando x^2 fra questa e la precedente deduciamo

$$m^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}.$$

Dunque: Le equazioni dei piani centrali producenti sezioni circolari nell'ellissoide sono

$$(10)\qquad x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\pm z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0.$$

Siano ora (x', y', z') le coordinate di un punto circolare: l'equazione del piano tangente in un punto qualunque (x', y', z') dell'ellissoide (come risulta dalla (2) §149) è data da

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Perchè questo piano sia parallelo ad uno dei piani (10) dobbiamo avere prima di tutto $y'=0$, indi

$$\frac{x'}{a^2}:\frac{z'}{c^2}=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\pm\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}$$

che scriviamo

$$\frac{x'}{a} = K\sqrt{a^2-b^2} \qquad \frac{z'}{c} = \pm K\sqrt{b^2-c^2},$$

indicando K un fattore di proporzionalità. Questo si determina subito osservando che si deve avere

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2 = 1,$$

indi

$$K^2(a^2-c^2) = 1.$$

Dunque: I quattro punti circolari dell'ellissoide sono situati sull'ellisse principale dell'asse massimo e minimo ed hanno le coordinate

$$(11) \quad \left(a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ 0,\ c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\right), \left(a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ 0,\ -c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)$$

$$\left(-a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ 0,\ -c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\right), \left(-a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ 0,\ c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\right).$$

Si osserverà che la lunghezza q del semidiametro che va ad un punto circolare è data da

$$q^2 = \frac{a^2(a^2-b^2)+c^2(-b^2-c^2)}{a^2-c^2} = a^2+c^2-b^2,$$

conformemente alla prima delle (8) del § precedente.

§165.

Forma dell'iperboloide ad una falda

Passiamo ora a descrivere la seconda delle quadriche a centro, *l'iperboloide ad una falda*.

Dalla sua equazione normale:

$$(B) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

deduciamo in primo luogo che le sue sezioni principali sono:

1° l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nel piano xy

2° l'iperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ nel piano xz

3° l'iperbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ nel piano yz

Supposto, come è lecito, $a > b$, l'ellisse principale, che dicesi *ellisse di gola*, ha l'asse maggiore diretto secondo l'asse delle x, il minore secondo l'asse y. Le due iperbole hanno per rispettivi assi primarii gli assi dell'ellisse di gola e per asse secondario ~~comune~~ quello delle z (l'asse

dell' iperboloide).

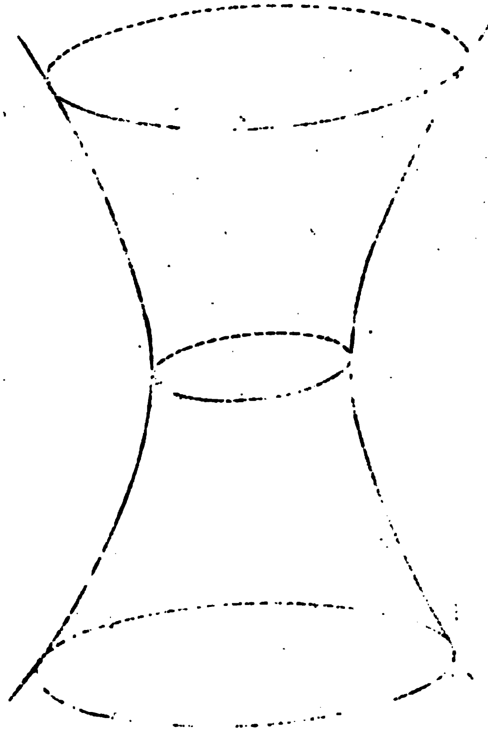
Per intendere la forma della superficie facciamovi una serie di sezioni coi piani $z = h$ paralleli al piano xy. La projezione della sezione sul piano xy è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

omotetica all'ellisse di gola e coi semiassi

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\,,\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

i quali vanno sempre più crescendo al crescere di h. Basta dunque immaginare che un'ellisse, prima coincidente coll'ellisse di gola, vari nello spazio in modo che il suo centro percorra l'asse Oz, il suo piano rimanga parallelo al piano xy e conservando gli assi le medesime direzioni, e la curva, restando sempre simile all'ellisse di gola, ingrandisca illimitatamente di forma in guisa che i due vertici dell'asse primario percorrano l'iperbola principale del piano xz e gli altri due quelli del piano yz. La superficie luogo di questa ellisse mobile è l'iperboloide ad una falda. Essa è composta di un solo pezzo che si estende da tutte le parti all'infinito.



Sappiamo già (§ 157) che questa quadrica ammette tutte tre le specie di sezioni, la qual cosa confermiamo ora analiticamente così:

Consideriamo un piano qualunque dello spazio e supposto dapprima che non sia parallelo all'asse Oz scriviamone l'equazione

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

che combinata con quella della quadrica dà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1$$

con

$$a_{11} = \frac{1}{a^2} - \frac{\alpha^2}{c^2}, \qquad a_{22} = \frac{1}{b^2} - \frac{\beta^2}{c^2}$$

$$a_{12} = -\frac{\alpha\beta}{c^2}$$

e quindi

$$A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{a^2}\right).$$

La sezione è quindi un'ellisse, un'iperbola od una parabola secondo che

$a^2\alpha^2+b^2\beta^2>c^2$, $a^2\alpha^2+b^2\beta^2<c^2$, $a^2\alpha^2+b^2\beta^2=c^2$.

Essa è della medesima specie di quella prodotta dal medesimo piano π o da un piano parallelo nel cono assintoto

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Se il piano parallelo π' pel vertice del cono lo sega secondo due generatrici immaginarie abbiamo un'ellisse, un'iperbola se le due generatrici sono reali distinte, una parabola se coincidenti ossia quando il piano secante è parallelo ad un piano tangente nel cono.

È ora evidente che un piano parallelo all'asse Oz produce una sezione iperbolica la qual cosa si conferma analiticamente osservando che se scriviamo l'equazione di un tal piano

$$y=mx+n$$

l'eliminazione di y dall'equazione della quadrica dà

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

che rappresenta sempre un'iperbola nel piano

xz.

Osserviamo in particolare le sezioni fatte con piani paralleli ai piani principali xz o yz, p. e. al primo. L'equazione di un tal piano è

$$y = h$$

e combinando coll'equazione della quadrica si ha

$$(12) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Finchè h è compreso fra $-b$ e $+b$ l'asse primario di quest'iperbola è diretto, come quello dell'iperbola principale $h = 0$, secondo l'asse Ox, il secondario secondo Oz, ma appena $|h| > b$ si scambiano asse primario e secondario.

Tutte le iperbole sezioni nel primo intervallo sono simili e similmente disposte e così pel secondo intervallo, ma queste sono simili e similmente disposte alle coniugate delle altre (§ 138). L'inversione fra i due assi trasverso e secondario avviene quando h prende uno dei valori limiti $\pm b$; allora l'iperbola (12) si scinde nelle due rette reali

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

corrispondentemente al fatto che il piano secante è tangente nel punto $(0, \pm b, 0)$ all'iperboloide e lo sega secondo due rette (generatrici).

§166.

Sezioni circolari nell'iperboloide ad una falda e nel cono assintoto

Possiamo far derivare l'iperboloide generale ad una falda da quello di rotazione precisamente come l'ellissoide ad assi ineguali da quello di rotazione (§160). Conseguentemente il calcolo si compie come al § ora citato e basterà indicarne i risultati.

Preso un iperboloide di rotazione ad una falda, la cui equazione scriviamo

$$(18) \qquad \frac{x^2+y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = 1,$$

immaginiamo di far girare tutti i paralleli della superficie attorno ai rispettivi centri in guisa da disporre ancora tutti i loro piani paralleli ad una medesima giacitura, ma obliqua all'asse. Il luogo dei nuovi circoli avrà sempre la medesima equazione, ma degli assi attuali solo i due Ox, Oz saranno ortogonali. La superficie

luogo è dunque un iperboloide ad una falda. Se poi semiassi a, b, c di questo iperboloide, procedendo come al §163, troviamo

(14) $a = p$, $b^2 - c^2 = a^2 - q^2$, $b^2 c^2 = a^2 q^2 \operatorname{sen}^2 \omega$,

avendo $\underline{\omega}$ lo stesso significato come al §163.

Indipendentemente dai valori di p, q, ω questo può essere un qualunque iperboloide ad una falda, come risulta dalle formole inverse

(15) $p = a$, $q = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$ $\operatorname{sen} \omega = \dfrac{bc}{a\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}$

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}}{a\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}.$$

Si vede già di qui che in un iperboloide ad una falda esistono due piani centrali, che passano per l'asse maggiore dell'ellisse di gola, e producono nell'iperboloide sezioni circolari; onde abbiamo come nell'ellissoide, due sistemi di circoli in piani paralleli.

Direttamente arriviamo al medesimo resultato osservando che nell'iperbola principale del piano yz

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

che ha per asse trasverso l'asse minore della ellisse

di gola esistono due diametri, simmetrici rispetto agli assi, e di lunghezza $= 2a$; i due piani che passano per l'uno o per l'altro di questi diametri e per l'asse maggiore di questo ellisse di gola producono per sezioni sulla quadrica circoli di raggio $= a$. Procedendo come al § precedente per l'ellissoide, si trova che le equazioni di questi due piani (ciclici) sono

$$y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}} \pm z\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}} = 0.$$

Nella quadrica attuale però non esistono naturalmente punti circolari, giacchè tutti i punti della quadrica sono iperbolici. In altre parole, i diametri coniugati ai piani ciclici non incontrano l'iperboloide ad una falda in punti reali.

Osserviamo ora che i piani delle sezioni circolari dell'iperboloide producono altresì sezioni circolari nel cono assintotico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

e siccome questa è l'equazione più generale di un cono quadrico ne deduciamo il resultato più volte enunciato: Il cono più generale del 2° grado

è il cono circolare obliquo (che è inoltre in doppio modo cono circolare).

§ 167.

Forma dell'iperboloide a due falde

L'iperboloide a due falde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ha per sezioni principali

l'ellisse immaginaria $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ nel piano xy

l'iperbola $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ nel piano xz

l'iperbola $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ nel piano yz

Le due iperbole hanno a comune l'asse traverso Oz (asse dell'iperboloide). Le sezioni fatte nella quadrica con piani $z=h$ paralleli al piano xy, projettate su questo piano hanno l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

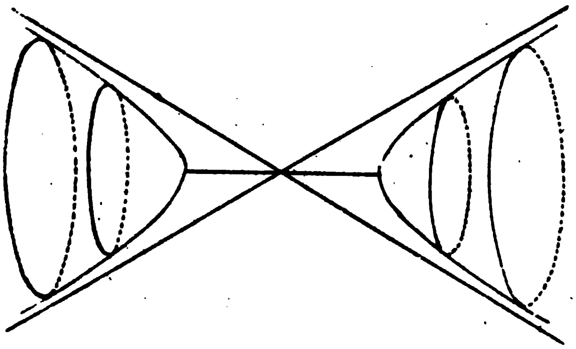
e sono quindi ellissi reali solo quando $|h|>c$. Lo strato compreso fra i piani paralleli

$$z=+h\,,\quad z=-h$$

è quindi privo di punti reali della quadrica. Crescendo h da c a $+\infty$, l'ellisse considerata percorre col suo centro il tratto infinito dell'asse Oz dal punto

$$A\equiv(0,0,c)\ \text{vertice}$$

all'infinito, e la conica ingrandendo all'infinito resta sempre simile a sè stessa, i due vertici estremità dell'asse maggiore percorrendo l'iperbola principale del piano xz e gli altri due quella del piano yz. Si ha così una prima falda infinita della quadrica al disopra del piano $z=h$; ed una seconda falda simmetrica di questa rapporto al piano xy completa la superficie.



Considerando insieme i due iperboloidi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

col cono assintoto in comune

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

vediamo che le due falde del secondo iperboloide

sono situate l'una entro una falda, l'altra entro l'altra del cono assintoto, mentre l'iperboloide ad una falda cinge tutto all'intorno il cono assintoto stesso]. Un diametro qualunque sega uno dei due iperboloidi soltanto in punti reali, le generatrici del cono assintoto separano i diametri dell'una specie da quelli dell'altra].

Un piano arbitrario dello spazio interseca i due iperboloidi ed il cono assintoto in coniche della medesima specie; quindi i piani delle sezioni circolari nel primo iperboloide sono anche piani di sezioni circolari (reali od immaginarie) nel secondo]. Sull'iperboloide a due falde esistono quattro punti circolari: sono i punti ove i diametri circolari ai due piani centrali ciclici segano quest'iperboloide, e sarebbe facile di qui calcolarne le coordinate].

Notiamo infine che l'iperboloide generale a due falde si può far derivare da quello di rotazione colla medesima trasformazione che abbiamo usato per l'ellissoide e per l'iperboloide ad una falda. Basterebbe per ciò deformare nel solito modo l'iperboloide di rotazione a due falde

$$(13^*) \qquad \frac{x^2+y^2}{p^2} - \frac{z^2}{q^2} = -1$$

anzichè quello ad una falda (13). Pel calcolo dei semiassi a, b, c dell'iperboloide deformato valgono ancora evidentemente le formole (14), (14*)

§ 168

Paraboloide ellittico

Passiamo ora a trattare dei due paraboloidi, cominciando da quello ellittico la cui equazione normale è la (II) § 158

$$(II) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Essendo p, q positivi, ogni punto reale della superficie ha l'ordinata z positiva cioè la parte reale della quadrica è tutta al disopra del piano xy. Per vederne la forma, osserviamo in primo luogo che le sezioni principali nei piani xz, yz sono le due parabole

$$x^2 = 2pz, \qquad y^2 = 2qz$$

aventi per asse comune l'asse Oz e dirette ambedue dalla parte positiva di questo. Combinando l'equazione della superficie con quella di un pia-

no normale all'asse Oz:

$$z = h \quad (h > 0),$$

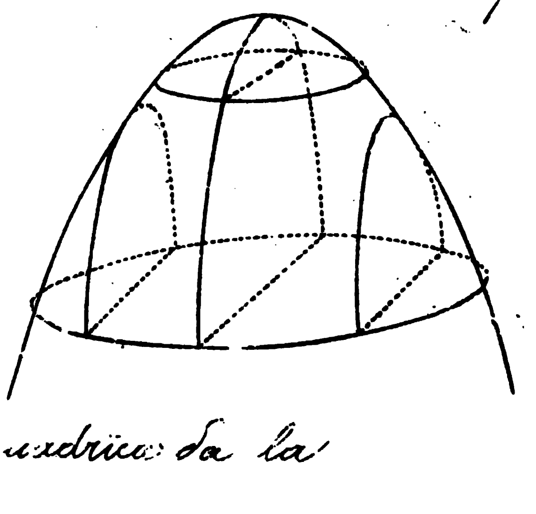
abbiamo

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h.$$

La sezione è dunque un'ellisse col centro sull'asse Oz e cogli assi diretti secondo Ox, Oy rispettivamente; e precisamente, supposto p. e. $p > q$ coll'asse maggiore diretto secondo Ox, il minore secondo Oy; i valori dei semiassi sono

$$a = \sqrt{2ph}, \quad b = \sqrt{2qh}.$$

Questa ellisse va sempre più ingrandendo di forma quanto più cresce h e la superficie consta quindi di un'unica falda estendentesi all'infinito.



Un piano non parallelo all'asse z ha un'equazione della forma

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

e produce quindi una sezione ellittica poichè l'eliminazione di z dall'equazione (II) della quadrica dà la

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2(\alpha x + \beta y + \gamma),$$

che rappresenta un'ellisse. Invece un piano parallelo all'asse z (e non parallelo p. e. all'asse y) ha per equazione

$$y = mx + n$$

ed eliminando y dalla (I) abbiamo

$$\frac{x^2}{p} + \frac{(mx+n)}{q} = 2z,$$

che rappresenta una parabola. Dunque i piani paralleli all'asse del paraboloide e questi soltanto producono sezioni paraboliche (Cf. § 151).

Come le quadriche a centro, così anche il paraboloide generale ellittico può farsi derivare dalla corrispondente quadrica di rotazione disponendo i piani dei paralleli ancora paralleli fra loro, ma obliqui all'asse; e con questo modo di generazione è immediatamente visibile la forma della superficie.

Prendiamo infatti un paraboloide di rotazione

$$(16) \qquad x^2 + y^2 = 2Pz,$$

dove con P abbiamo indicato il parametro della parabola principale (o del paraboloide). Eseguendo la deformazione indicata sarà ancora la (16) l'equa-

zione della superficie luogo, ma degli assi attuali soltanto Ox, Oy saranno ortogonali. Però potremo ancora supporre Ox ortogonale ad Oy (§163) e solo inclinato di un angolo $\underline{\omega}$ sopra Oz, angolo che misurerà l'inclinazione dei piani dei circoli sopra l'asse Oz. Colle formole di trasformazione

$$x = X - \cot\omega\, Z, \quad y = Y, \quad z = \frac{Z}{\operatorname{sen}\omega}$$

cangiamo la (16) in assi ortogonali OX, OY, OZ nelle

$$(16^*) \quad X^2 + Y^2 + \cot^2\omega\, Z^2 - 2\cot\omega\, XY = 2P\frac{Z}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Qui le radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 dell'equazione cubica $D(\rho) = 0$ sono

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}, \quad \rho_3 = 0$$

e poichè

$$\Delta = -\frac{p^2}{\operatorname{sen}^2\omega}, \quad \rho_1\rho_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

l'equazione normale (29) §158 del nostro paraboloide diventa

$$x^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\omega} = 2Pz.$$

Essa è quindi un paraboloide ellittico coi parametri

$$p = P, \quad q = P \operatorname{sen}^2 \omega,$$

che dipendentemente dai valori di P, ω possono assumere due valori qualunque.

Risulta di qui che sul paraboloide generale ellittico esistono due serie reali di circoli in piani paralleli, come per le quadriche a centro.

Corrispondentemente si hanno al paraboloide due punti circolari di cui sarebbe facile calcolare le coordinate.

§169.

I due paraboloidi come superficie di traslazione

Il paraboloide ellittico è suscettibile di una semplice generazione geometrica che ne fa intendere subito la forma; e questa generazione è tanto più importante in quantochè si applica nel medesimo modo al paraboloide iperbolico, pel quale viene invece a mancare la forma speciale di rotazione da cui abbiamo visto potersi considerare derivate le altre quadriche.

Le proprietà che abbiamo in vista dipendono dal teorema generale seguente: Le sezioni fatte in un paraboloide con piani paralleli

fra loro ed all'asse del paraboloide sono parabole tutte eguali fra loro.

Basterà pel nostro scopo dimostrare il teorema per le sezioni in piani paralleli ai principali xz, yz; la stessa dimostrazione si applicherebbe al caso generale mutando gli assi ortogonali Ox, Oy in due assi obliqui secondo le due direzioni coniugate uscenti dal vertice O, il che conserverebbe all'equazione

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

del paraboloide la medesima forma (cf § 158).

Seghiamo il paraboloide con un piano

$$y = h$$

parallelo al piano xz; la projezione ortogonale della sezione su questo piano è adunque la parabola

$$\frac{x^2}{p} = 2z - \frac{h^2}{q}$$

ossia

$$x^2 = 2p\left(z - \frac{h^2}{2q}\right).$$

Essa ha il medesimo parametro p della parabola principale ed è quindi uguale a

questa; il suo asse è ancora l'asse delle z, soltanto il suo vertice è nel punto

$$x = 0 \quad z = \frac{h^2}{2q}.$$

Così la sezione obiettiva è una parabola eguale alla principale, coll'asse parallelo all'asse di questa e col vertice

$$\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$$

situato sull'altra parabola principale

$$y^2 = 2qz.$$

Il paraboloide si genera dunque facendo scorrere, con un movimento di traslazione, una delle due parabole principali lungo l'altra, in guisa che il vertice della prima percorra la seconda; in questo scorrimento il piano e l'asse della parabola mobile si conservano sempre paralleli al piano ed all'asse primitivo.

Per quanto abbiamo osservato da principio, in luogo di una parabola principale si può prendere, per generare la superficie con un movimento di traslazione, un'altra qualunque delle parabole uscenti dal vertice del paraboloide; il vertice della parabola mobile si dovrà allora far scorrere lungo la parabola co-

niugata, cioè lungo quella che esce dal vertice in direzione coniugata.

Inversamente si vede facilmente che prese due parabole, in piani distinti, aventi a comune il vertice l'asse e rivolte dalla medesima parte di questo, se si dà all'una parabola un moto di traslazione sì che il suo vertice descriva l'altra parabola, il luogo generato dalla parabola mobile sarà un paraboloide ellittico.

Le stesse considerazioni si applicano al paraboloide iperbolico coll'unica differenza che l'equazione essendo

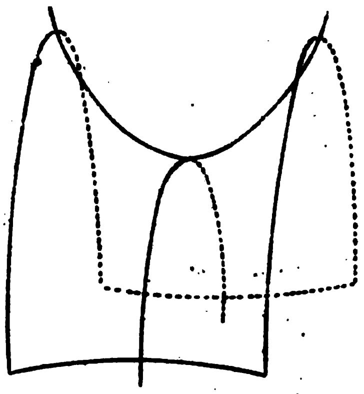
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

le due parabole

$$\frac{x^2}{p} = 2z \ , \ \frac{y^2}{q} = -2z$$

sono rivolte la prima verso la direzione positiva, la seconda verso la negativa dell'asse. La superficie si genera ancora con la traslazione dell'una parabola lungo l'altra.

Le sezioni normali all'asse Oz sono iperbole, cogli assi diretti secondo gli assi Ox, Oy e più precisamente se il piano segante è $z = h$ ed h è positivo l'asse trasverso è diretto secondo l'as-



se Ox, il secondario secondo Oy; per h negativo accade l'opposto. Il piano xy stesso $z=0$ sega l'iperboloide secondo le due rette

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

che sono le generatrici uscenti dal vertice.

"§.170"

Le sezioni circolari nelle quadriche in relazione col circolo assoluto.

Nel trattare singolarmente delle varie specie di quadriche, abbiamo constatato che ciascuna quadrica possiede due e due sole serie <u>reali</u> di sezioni circolari, eccezione fatta dal paraboloide iperbolico che, non ammettendo sezioni ellittiche, non ha sezioni circolari.

Vogliamo ora risolvere il medesimo problema geometricamente, colla considerazione del circolo assoluto. Una sezione piana qualunque di una quadrica ha per punti all'infinito i

due punti ove la traccia del suo piano sul piano all'infinito sega la conica C_∞ della quadrica; sarà dunque un circolo solo quando quei due punti appartengono al circolo assoluto C'_∞. Ora le due coniche C_∞, C'_∞ si segano in quattro punti A, B, A', B' (§107) ed i 6 sistemi di piani paralleli che hanno per tracce le 6 rette

$$AB,\ AA',\ AB',\ BA',\ BB',\ A'B'$$

sono dunque tutti e soli i piani che producono sezioni circolari. Volendo ora distinguere fra questi i reali dagli immaginari bisogna osservare che essendo le equazioni delle due coniche C_∞, C'_∞ a coefficienti reali, e la C'_∞ immaginaria, i detti quattro punti A, B, A', B' sono tutti immaginari e due a due coniugati. Allora delle 6 rette sopra considerate solo le due AA', BB', come congiungenti punti coniugati, sono reali ed abbiamo quindi solo due sistemi di circoli reali sulla quadrica.

Il ragionamento precedente vale tanto se C_∞ è una conica propria (quadriche a centro) come quando C_∞ è degenere (paraboloidi); ma se il paraboloide è iperbolico allora la C_∞ è composta di due rette reali, che sono appunto le due rette AA', BB', generatrici del paraboloide

sul piano all'infinito.

In questo caso non abbiamo circoli effettivi sulla superficie, o, se si vuole, ciascuno di essi è composto di una generatrice qualunque della superficie e della generatrice all'infinito del sistema opposto.

Se traduciamo analiticamente le considerazioni precedenti, troviamo nuovamente le equazioni dei piani ciclici nelle quadriche. Prendiamo infatti dapprima una quadrica a centro la cui equazione normale scriviamo

(17) $$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 1$$

supponendo, come è lecito $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$.

L'equazione sul piano all'infinito della conica C_∞ è

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = 0$$

e quella del circolo assoluto C'_∞

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Se eliminiamo p. e. x^2 fra le due equazioni otteniamo

(18) $$(\rho_2 - \rho_1) y^2 + (\rho_3 - \rho_1) z^2 = 0;$$

questa rappresenta una conica degenere che passa pei quattro punti comuni alle due coniche C_∞, C'_∞. Nello spazio la (18) è l'equazione complessiva dei due piani centrali ciclici corrispon-

denti; essi passano come si vede per uno degli assi della quadrica (per l'asse delle x). Così le equazioni complessive delle tre coppie di piani ciclici sono

$$(\rho_2-\rho_1)y^2+(\rho_3-\rho_1)z^2=0$$
$$(\rho_3-\rho_2)z^2+(\rho_1-\rho_2)x^2=0$$
$$(\rho_1-\rho_3)x^2+(\rho_2-\rho_3)y^2=0;$$

ma essendo $\rho_1>\rho_2>\rho_3$ solo la coppia media è composta di piani reali.

Dunque: Per ogni asse di una quadrica a centro passano due piani di sezioni circolari, ma soltanto quelli corrispondenti alla radice media ρ_2 sono reali.

Analogamente procedendo per un paraboloide ellittico di equazione

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>q),$$

vediamo che si ha l'unica coppia reale di piani ciclici (per il vertice)

$$y^2\left(\frac{p}{q}-1\right)-z^2=0.$$

Terminiamo le ricerche sulle sezioni circolari delle quadriche colla dimostrazione del teorema seguente: Due circoli antiparalleli di una quadrica (cioè appartenenti a sistema diverso) gia

cioè sempre sopra una medesima sfera.

Per dimostrarlo osserviamo che per una quadrica (17) a centro essendo

$$(\rho_3-\rho_2)z^2+(\rho_1-\rho_2)x^2=0$$

l'equazione complessiva di due piani centrali ciclici, quella complessiva dei due piani dei circoli considerati non ne differirà che per termini di 1° grado e sarà quindi

$$(19)\qquad (\rho_3-\rho_2)z^2+(\rho_1-\rho_2)x^2+2Ax+2Bz+C=0.$$

Se si sottrae questa dalla equazione (17) della quadrica si ha l'equazione di una sfera

$$\rho_2(x^2+y^2+z^2)-2Ax-2Bz-C-1=0,$$

che passa per la linea comune alle due quadriche (17), (19), cioè per i due circoli considerati. Analoga dimostrazione si fa pel paraboloide ellittico.

Dal teorema dimostrato segue anche l'altro: Ogni sfera che passi per un circolo della quadrica sega la quadrica in un secondo circolo antiparallelo

§ 171.

Terne di diametri ortogonali nell'ellissoide

Andiamo ora a dimostrare alcune semplici proprietà delle terne di diametri ortogonali o coniugati nell'ellissoide.

Nell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

la lunghezza ρ del semidiametro coi coseni di direzione $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ è data dalla formola

$$(20)\qquad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

come risulta dall'osservare che le coordinate dell'estremo del semidiametro sono

$$\rho\cos\alpha,\ \rho\cos\beta,\ \rho\cos\gamma.$$

Prendiamo ora altri due semidiametri ρ', ρ'' coi rispettivi coseni di direzione $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')(\cos\alpha'', \cos\beta'', \cos\gamma'')$; avremo

$$(20^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho'^2}=\dfrac{\cos^2\alpha'}{a^2}+\dfrac{\cos^2\beta'}{b^2}+\dfrac{\cos^2\gamma'}{c^2} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho''^2}=\dfrac{\cos^2\alpha''}{a^2}+\dfrac{\cos^2\beta''}{b^2}+\dfrac{\cos^2\gamma''}{c^2} \end{cases}$$

"8171. 643.

Supponiamo ora che la terna di diametri (ρ', ρ', ρ'') sia una terna ortogonale. Addizionando le (20), (20*) coll'osservare le identità:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1, \end{cases}$$

ne deduciamo:

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

onde il teorema:

<u>In un ellissoide la somma dei quadrati delle inverse delle lunghezze di tre semidiametri ortogonali è costante</u>.

Proponiamoci ora di calcolare la distanza p di un piano tangente all'ellissoide dal centro in funzione dei coseni di direzione $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ della normale al piano. Se con (x', y', z') indichiamo le coordinate del punto di contatto, l'equazione del piano tangente è

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$$

e si ha quindi

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{p\,x'}{a^2}, \quad \cos\beta = \frac{p\,y'}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{p\,z'}{c^2},$$

ovvero

$$p\frac{x'}{a} = a\cos\alpha, \quad p\frac{y'}{b} = b\cos\beta, \quad p\frac{z'}{c} = c\cos\gamma.$$

Quadrando e sommando queste tre, coll'osservare che si ha

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2 = 1,$$

otteniamo la formola richiesta

$$(21) \qquad p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Supponiamo ora d'avere altri due piani tangenti ortogonali al primo fra loro e siano p', p'' le loro rispettive distanze dal centro. Addizionando la (21) colle corrispondenti per p', p'', otteniamo

$$(22) \qquad p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

I tre piani considerati formano un triedro trirettangolo circoscritto all'ellissoide ed evidentemente la distanza del vertice del triedro dal centro è data da $\sqrt{p^2 + p'^2 + p''^2}$; dunque: <u>il luogo del vertice di un triedro trirettangolo circoscritto all'ellissoide è una sfera concentrica all'ellissoide e di raggio $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.</u>"

§ 172. Rappresentazione dell'ellissoide sulla sfera.

La forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

dell'equazione dell'ellissoide dimostra che se (x, y, z) è un punto dell'ellissoide e si pone

$$(23) \quad \frac{x}{a}=X, \quad \frac{y}{b}=Y, \quad \frac{z}{c}=Z$$

saranno X, Y, Z le coordinate di un punto della sfera

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

ossia tre coseni di direzione. Le formole (23) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'ellissoide e quelli della sfera (una projettività), danno cioè una rappresentazione dell'una superficie sull'altra. Per stabilire le proprietà fondamentali di questa rappresentazione si osservi che se (x', y', z'), (x'', y'', z'') sono le estremità di due semidiametri coniugati nell'ellissoide ha luogo la relazione caratteristica

$$(24)\qquad \frac{x'}{a}\cdot\frac{x''}{a}+\frac{y'}{b}\cdot\frac{y''}{b}+\frac{z'}{c}\cdot\frac{z''}{c}=0.$$

È infatti l'equazione del piano diametrale coniugato al diametro OP' che dal centro O va al punto $P'\equiv(x'y'z')$ è

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0;$$

affinchè questo piano contenga il secondo diametro è appunto necessario e sufficiente che sia soddisfatta la (24). Ora se con (X',Y',Z'), (X'',Y'',Z'') indichiamo le rispettive coordinate dei punti della sfera che corrispondono, secondo le (23), ai due punti (x',y',z'), (x'',y'',z'') dell'ellissoide, la (24) equivale all'altra:

$$X'X''+Y'Y''+Z'Z''=0,$$

onde desumiamo la proprietà fondamentale della rappresentazione considerata: <u>A due diametri coniugati dell'ellissoide corrispondono due diametri ortogonali della sfera e viceversa</u>.

Se consideriamo ora un punto $P\equiv(x,y,z)$ sull'ellissoide ed il corrispondente $Q\equiv(X,Y,Z)$ sulla sfera ad ogni tangente in P all'ellissoide corrisponde una tangente determinata nel punto Q alla sfera e la proprietà sopra dimostrata si può anche enunciare così: <u>Due direzioni coniu-</u>

gate uscenti da P sull'ellissoide si trasformano sulla sfera in due direzioni ortogonali uscenti da Q e viceversa. Vi ha dunque in generale una sola coppia di direzioni ortogonali sull'ellissoide che si trasforma in un'altra tale coppia sulla sfera, quella delle direzioni principali, cioè delle parallele agli assi della sezione centrale prodotta nell'ellissoide dal piano parallelo al piano tangente in P. Fa eccezione solo il caso che il punto P sia un punto circolare dell'ellissoide, che allora ogni coppia di direzioni ortogonali uscenti da P si muta in una coppia ortogonale di direzioni sulla sfera.

Più in generale l'angolo formato da due direzioni qualunque uscenti da P viene cangiato in un angolo eguale sulla sfera. Così: La rappresentazione considerata della superficie ellissoidica sulla sferica conserva gli angoli solo nell'intorno dei quattro ombelichi.

"§173"

Terne di diametri coniugati nell'ellissoide.

Siano $P' \equiv (x', y', z')$, $P'' \equiv (x'', y'', z'')$

$P''' \equiv (x''', y''', z''')$ le estremità di tre semidiametri due a due coniugati nell'ellissoide e sieno d', d'', d''' le loro rispettive lunghezze. Se $(X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''), (X''', Y''', Z''')$ sono i tre punti corrispondenti sulla sfera il determinante

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix}$$

sarà quello di nove coseni di direzione di una terna ortogonale. Ora si ha

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

indi per le (23).

$$(25) \qquad d'^2 = a^2 X'^2 + b^2 Y'^2 + c^2 Z'^2.$$

Similmente avremo

$$d''^2 = a^2 X''^2 + b^2 X''^2 + c^2 Z''^2$$

$$d'''^2 = a^2 X'''^2 + b^2 X'''^2 + c^2 Z'''^2$$

e addizionando colla (25), osservando che si ha

$$X'^2 + X''^2 + X'''^2 = 1$$

e analogamente per Y, Z, risulta

$$d'^2 + d''^2 + d'''^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Abbiamo dunque il teorema: _In un ellissoide la somma dei quadrati delle lunghezze di tre semidiametri coniugati è costante ed uguale ad $a^2+b^2+c^2$._ Questo teorema è evidentemente l'analogo del teorema d'Apollonio per le coniche (§126)

e può del resto, come facilmente si vede, dedursi da questo.

Consideriamo ora il tetraedro i cui quattro vertici sono il centro O e le tre estremità P', P'', P''' dei tre semidiametri coniugati. Indicandone con V il volume, abbiamo

$$6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aX' & bY' & cZ' \\ aX'' & bY'' & cZ'' \\ aX''' & bY''' & cZ''' \end{vmatrix} = abc;$$

questo volume è dunque costante al variare della terna dei diametri coniugati. Possiamo esprimere questa proprietà sotto l'altra forma: <u>È costante il volume di un parallelepipedo circoscritto all'ellissoide, i cui spigoli siano paralleli ad una terna di diametri coniugati.</u>

Capitolo 16°

I due sistemi di generatrici sulle quadriche rigate

§ 174.

I due sistemi di rette sull'iperboloide

Fra le cinque specie di quadriche due sole sono a discriminante positivo e quindi a generatrici reali: l'iperboloide ad una falda ed il paraboloide iperbolico. Ci proponiamo nel presente capitolo di studiare più da vicino la distribuzione e le proprietà di questo doppio sistema di rette esistenti sulla quadrica.

Cominciando dall'iperboloide ad una falda, scriviamone l'equazione normale

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Una retta esistente sull'iperboloide non può, come è chiaro geometricamente, essere parallela al piano xy e perciò potremo scriverne le (1) Per una tale retta conducendo il piano parallelo

equazioni ridotte sotto la forma:

$$(2)\quad \begin{cases} x = mz + \alpha \\ y = nz + \beta. \end{cases}$$

Bisognerà ora ricercare le relazioni, necessarie e sufficienti, da cui debbono essere legati i quattro parametri m, n, α, β della retta perchè questa giaccia sulla superficie. Per le (2) il punto di coordinate

$$mz + \alpha,\ nz + \beta,\ z$$

appartiene qualunque sia z alla retta e perchè la retta giaccia sulla quadrica occorre dunque e basta che questi valori di x, y, z, introdotti nella (1), rendano identica l'equazione risultante in z.[1]

---

al piano xy si ha per sezione effettiva nella quadrica un'ellisse (simile all'ellissoide di gola) e la retta non può quindi appartenerbi.

(1) Lo stesso metodo si applica in generale per la ricerca delle eventuali rette (2) giacenti sopra una superficie di data equazione

$$f(x, y, z) = 0.$$

Si vede subito di qui che: Una superficie algebrica d'ordine n non possiede in generale alcuna retta se $n > 3$.

Ne segue che m, n, α, β debbono soddisfare alle relazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{b}\right)^2=1 \\ \left(\dfrac{cm}{a}\right)^2+\left(\dfrac{cn}{b}\right)^2=1 \\ \dfrac{\alpha}{a}\dfrac{m}{a}+\dfrac{\beta}{b}\dfrac{n}{b}=0 \end{cases}$$

La forma di queste relazioni suggerisce l'introduzione di un angolo ausiliare φ tale che si abbia

$$\frac{\alpha}{a}=\cos\varphi\,,\quad \frac{\beta}{b}=\operatorname{sen}\varphi,$$

e le relazioni rimanenti danno allora

$$\frac{cm}{a}=\pm\operatorname{sen}\varphi,\quad \frac{cn}{b}=\mp\cos\varphi,$$

valendo insieme i segni superiori o gli inferiori. Viceversa, qualunque valore si dia a φ, prendendo

$$\begin{cases} \alpha=a\cos\varphi\,, & \beta=b\operatorname{sen}\varphi \\ m=\pm\dfrac{a}{c}\operatorname{sen}\varphi\,, & n=\mp\dfrac{b}{c}\cos\varphi, \end{cases}$$

La superficie <u>generale</u> del 3° ordine possiede invece un numero limitato di rette (ventisette rette).

si sodisfano le (3) e la corrispondente retta (2) giace quindi sull'iperboloide.

Scegliendo i segni superiori, si ha così un primo sistema di rette sulla quadrica di equazioni:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\varphi\, z + a\cos\varphi \\[2ex] y = -\dfrac{b}{c}\cos\varphi\, z + b\,\mathrm{sen}\,\varphi. \end{cases}$$

Scegliendo invece i segni inferiori, si ha un secondo sistema di equazioni:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x = -\dfrac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\psi . z + a\cos\psi \\[2ex] y = +\dfrac{b}{c}\cos\psi . z + b\,\mathrm{sen}\,\psi, \end{cases}$$

dove pel secondo sistema abbiamo indicato con una nuova lettera ψ l'angolo (parametro) ausiliario.

Che i due sistemi di rette siano effettivamente distinti risulta subito dall'osservare che è impossibile far coincidere una retta del sistema (I) con una del sistema (II); ciò del resto risulterà anche dalle proprietà dei due sistemi che ci accingiamo ora a dimostrare.

§ 175.

Proprietà dei due sistemi di rette

Dimostriamo ora alcune proprietà fondamentali del doppio sistema di rette.

A) <u>Per un punto arbitrario P dell'iperboloide passa una retta del sistema (I) ed una retta del sistema (II).</u>

Siano $(x_0\ y_0\ z_0)$ le coordinate di P_0, sicchè

$$(4) \qquad \left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{z_0}{c}\right)=1.$$

Risolvendo il sistema lineare in due incognite ξ, η

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a}=\dfrac{z_0}{c}\xi+\eta \\ \dfrac{y_0}{b}=\xi-\dfrac{z_0}{c}\eta, \end{cases}$$

si vede subito che, a causa della (4), sarà identicamente

$$\xi^2+\eta^2=1,$$

e potremo quindi determinare un valore φ_0 di φ tale che sia

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = \xi \qquad \cos\varphi_0 = \eta,$$

dopo di che quella generatrice del sistema (I) che corrisponde a $\varphi = \varphi_0$ passerà per $(x_0\, y_0\, z_0)$ come si voleva. Analogamente dicasi pel sistema (II).

Possiamo esprimere la medesima proprietà dicendo: Se nelle formole (I) (o (II)) si fa variare φ (o ψ) da 0 a 2π la retta corrispondente si muoverà nel rispettivo sistema e descriverà l'intera superficie.

B) Due generatrici arbitrarie pure in sistema diverso sono sempre complanari; sono invece sghembe fra loro se appartengono allo stesso sistema.

La prima cosa si dimostra osservando che per le due generatrici arbitrarie (I), (II) è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} a\cos\psi - a\cos\varphi & b\operatorname{sen}\psi - b\operatorname{sen}\varphi \\ \frac{a}{c}\operatorname{sen}\varphi + \frac{a}{c}\operatorname{sen}\psi\,, & -\frac{b}{c}\cos\varphi - \frac{b}{c}\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{ab}{c}\left\{(\cos^2\varphi - \cos^2\psi) + (\operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\psi)\right\}$$

Consideriamo invece le due generatrici del sistema (I), corrispondenti ai valori φ, φ' dell'angolo ausiliario; i corrispondenti valori dei parametri delle due rette sono

$$\begin{cases} \alpha = a\cos\varphi & \beta = b\,\text{sen}\,\varphi \\ m = \dfrac{a}{c}\,\text{sen}\,\varphi, & n = \dfrac{b}{c}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = a\cos\varphi' & \beta' = b\,\text{sen}\,\varphi' \\ m' = \dfrac{a}{c}\,\text{sen}\,\varphi', & n' = -\dfrac{b}{c}\cos\varphi'. \end{cases}$$

Il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' \\ m-m' & n-n' \end{vmatrix}$$

ha quindi il valore

$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha', & \beta-\beta' \\ m-m', & n-n' \end{vmatrix} = -\frac{ab}{c}\left\{(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+(\text{sen}\,\varphi-\text{sen}\,\varphi')^2\right\}$$

che è sempre <u>negativo</u> e non si annulla che nel caso da escludersi $\varphi'=\varphi$.

Se le due generatrici appartengono al sistema (II) si ha invece

$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' \\ m-m' & n-n' \end{vmatrix} = \frac{ab}{c}\left\{(\cos\psi-\cos\psi')^2+(\text{sen}\,\psi-\text{sen}\,\psi')^2\right\}$$

70.

Ricordando il significato del segno della minima distanza di due rette (§ 68) ed osservando che per due generatrici del medesimo sistema, <u>sufficientemente</u> <u>vicine</u> <u>fra</u> <u>loro</u>, è certamente

$mm'+nn'+1>0$,

vediamo che: Due generatrici qualunque del medesimo sistema, abbastanza vicine fra loro, formano una coppia sempre sinistrorsa se appartengono al sistema (I), una coppia destrorsa nel sistema (II)(1). Brevemente diciamo che il sistema (I) di generatrici è sinistrorso il sistema (II) è destrorso. La stessa cosa può anche significarsi dicendo che se un punto si sposta lungo una generatrice del sistema (I) il piano tangente ruota attorno alla generatrice da destra verso sinistra, e invece da sinistra verso destra per una generatrice del sistema (II)

§176"

Modo di distribuzione delle generatrici sull'iperboloide.

Per riconoscere come sono distribuite le generatrici sull'iperboloide cominciamo dall'osservare che ciascuna di esse incontra il piano.

(1) Nelle nostre solite ipotesi rispetto alla orientazione degli assi coordinati

$x\,y$ in un punto della ellisse di gola. Basterà dunque prendere un punto arbitrario P sulla ellisse di gola ed esaminare come giacciono le due generatrici uscenti da P e come variano al variare di P sulla ellisse di gola, per la qual cosa, a causa della simmetria della superficie rapporto ai piani xz, yz, ci potremo limitare a far percorrere a P il primo quadrante dell'ellisse. Le coordinate x', y' di un punto dell'ellisse di gola si possono porre sotto la forma

$$x' = a \cos\varphi \;,\; y' = b \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

e dando quindi nelle formole (I), (II) all'angolo ausiliario appunto questo valore φ avremo le due generatrici uscenti da $P(a\cos\varphi, b\cos\varphi)$:

$$(5)\quad \begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\varphi \,.\, z + a\,\mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] y = \mp \dfrac{b}{c}\cos\varphi\; z + b\,\mathrm{sen}\,\varphi . \end{cases}$$

Eliminando $\underline{z}$ fra questi si ha

$$(6)\qquad \frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\cos\varphi}{b} = 1$$

che rappresenta la proiezione ortogonale comune delle due generatrici sul piano dell'ellisse di gola; ora questa non è altro che l'equazione della tangente nel punto $(x'y')$ all'ellisse di gola.

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1,$$

e per ciò: __Le due generatrici uscenti dal punto P dell'ellisse di gola sono situate sul piano π condotto per la tangente in P alla ellisse normalmente al suo piano.__

Questo piano π è evidentemente il piano tangente in P all'iperboloide onde il resultato stabilito così analiticamente era prevedibile a priori. Dalle (5) risulta altresì che quelle due generatrici sono egualmente inclinate sull'asse Oz (o sulla tangente dell'ellisse di gola) e per conoscere perfettamente la loro posizione basterà calcolare l'angolo acuto γ che ciascuna di esse forma con Oz. Si ha

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{c}\right)^2+\left(\frac{b\cos\varphi}{c}\right)^2+}}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{c+\frac{b^2x'^2}{a^2}+\frac{a^2y'^2}{b^2}}}$$

Ma per le formole (7) del §125, indicando con ρ la lunghezza del semidiametro della ellisse di gola parallelo alla tangente in P, si ha

$$\rho^2 = \frac{b^2 x'^2}{a^2} + \frac{a^2 y'^2}{b^2},$$

onde la precedente può scriversi

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2+\rho^2}}$$

ed abbiamo finalmente

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\rho}{c}.$$

In questa formola γ rappresenta il semiangolo d'apertura delle due generatrici uscenti da P e ρ la lunghezza del semidiametro della ellisse di gola parallelo alla tangente in P. Quando P si fa variare sul primo quadrante dell'ellisse di gola dal vertice A estremità dell'asse maggiore a quello B del semiasse minore, ρ va costantemente crescendo da b ad a e perciò γ va continuamente crescendo dal valore minimo

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{c}\right) \text{ che ha luogo in } A$$

al massimo

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{c}\right) \text{ che ha luogo in } B.$$

Negli altri quadranti γ riprende periodicamente gli stessi valori.

Notevole è il caso dell'iperboloide di ro-

stazione $a = b$; allora γ ha il valore costante

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{c}\right).$$

L'iperboloide si genera allora facendo rotare attorno all'asse immobile una generatrice (dell'uno o dell'altro sistema) la cui minima distanza dall'asse è $= a$.

Viceversa: Se, prese due rette sghembe r, r', si fa rotare r' attorno ad r la superficie di rotazione generata è un iperboloide ad una falda. Indicando infatti con a la minima distanza fra le due rette e con γ la loro inclinazione, posto $c = a \cot \gamma$, la superficie generata coincide, per quanto precede, coll'iperboloide

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

§177.

Generazione delle quadriche rigate

Se per il centro dell'iperboloide tiriamo le rette parallele alle generatrici dell'uno o dell'altro sistema dell'iperboloide è chiaro geometricamente che il luogo di queste parallele

(le quali escono dal centro e vanno ai punti all'infinito della quadrica) è il cono assintoto.

Ciò si conferma subito analiticamente osservando che le equazioni della parallela tirata dal centro alla retta generica p. e. del sistema (I) si ottengono sopprimendo in queste equazioni i termini noti, ciò che dà

$$x = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \varphi \cdot z \ , \quad y = -\frac{b}{c} \cos\varphi \cdot z .$$

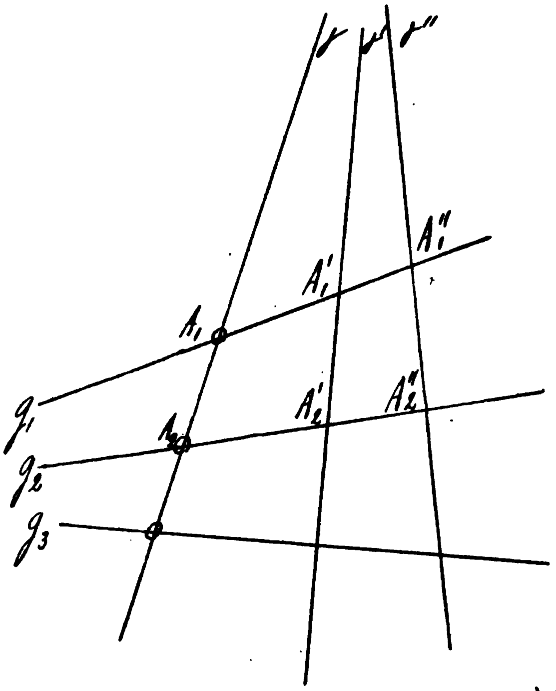
da queste eliminando φ si ha appunto l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

del cono assintoto, che è adunque il luogo di queste parallele. Inversamente, presa ad arbitrio una generatrice del cono assintoto, si vede subito che in ciascuno dei due sistemi di rette della quadrica (I), (II) abbiamo una ed una sola retta parallela a quella generatrice.

Osserviamo che <u>tre generatrici del medesimo sistema nell'iperboloide non sono mai parallele ad un piano</u>; altrimenti le tre generatrici parallele del cono assintoto dovrebbero stare in un piano, ciò che è assurdo.

Prendiamo ora tre generatrici fisse



g_1, g_2, g_3 p. e. del sistema (I); una generatrice mobile γ nell sistema (II) si appoggia a tutte tre ed il suo movimento nello spazio è perfettamente regolato da queste condizioni, poichè per ogni punto di g_1 passa una ed una sola retta (γ) appoggiata a g_2, g_3. Dunque:

c) L'iperboloide ad una falda può riguardarsi come generato da una retta mobile γ che si appoggia a tre rette fisse g_1, g_2, g_3, due a due sghembe, e non parallele ad un medesimo piano, teorema che fra breve invertiremo.

Sopra due generatrici fisse g_1, g_2 di un sistema una generatrice mobile γ nell'altro sistema segna due punti A_1, A_2 che descrivono, al variare di γ due punteggiate g_1, g_2; diciamo che queste due punteggiate sono projettive. Ed infatti se consideriamo varie posizioni

$\gamma, \gamma', \gamma''$ .....

di f e i punti corrispondenti

$A_1, A'_1, A''_1 \ldots\ldots$ di g_1

$A_2, A'_2, A''_2 \ldots\ldots$ di g_2

le due punteggiate

$(A_1 A'_1 A''_1 \ldots\ldots)$

$(A_2 A'_2 A''_2 \ldots\ldots)$

sono le sezioni del fascio di piani

$(g_3 f), (g_3 f'), (g_3 f'') \ldots$

colle due rette g_1, g_2 e sono quindi projettive.

Si osservi però che queste due punteggiate projettive non sono simili perchè altrimenti le congiungenti $f, f', f'' \ldots$ delle coppie di punti corrispondenti sarebbero parallele ad un piano[1]. Così adunque:

D) Sopra due rette fisse di un sistema nell'iperboloide una generatrice mobile nell'altro segna due punteggiate projettive non simili.

Per invertire i teoremi C) D) dimostriamo ora che:

E) Se si hanno due punteggiate projettive, i

---

(1) O in altro modo: se le due punteggiate fossero simili si corrisponderebbero i loro punti all'infinito e la congiungente f di questi sarebbe all'infinito, ciò che nell'iperboloide non può accadere.

cui sostegni siano sghembi nello spazio, il luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti è una quadrica. Questa è un iperboloide ad una falda se le due punteggiate non sono simili, un paraboloide quando siano simili.

Per dimostrarlo riferiamoci a coordinate projettive omogenee ed assumiamo un tetraedro fondamentale $A_1 A_2 A_3 A_4$ di cui due spigoli opposti, diciamo $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, siano i sostegni delle due punteggiate. Un punto P mobile su $A_1 A_2$ avrà coordinate della forma

$$(x_1' \; x_2' \; 0 \; 0)$$

ed un punto corrispondente Q della seconda coordinata

$$(0,\, 0,\, x_3',\, x_4').$$

Poichè le punteggiate descritte da P, Q sono projettive, fra i rapporti $\frac{x_1'}{x_2'}$, $\frac{x_3'}{x_4'}$ sussisterà una relazione bilineare ed avremo quindi

$$(8) \qquad a\, x_1' x_3' + b\, x_1' x_4' + c\, x_2' x_3' + d\, x_2' x_4' = 0$$

con a, b, c, d costanti. Ora le coordinate di un punto qualunque M della congiungente PQ saranno

$x_1 = \lambda x_1'$, $x_2 = \lambda x_2'$, $x_3 = \mu x_3'$, $x_4 = \mu x_4'$ con λ, μ variabili, onde la (8), moltiplicata per $\lambda \cdot \mu$ ci dà:

$$a x_1 x_2 + b x_1 x_4 + c x_2 x_3 + d x_2 x_4 = 0,$$

che è l'equazione del luogo descritto da M; questa è adunque una quadrica c.d.d. Se le due punteggiate sono simili la congiungente i due punti all'infinito delle due punteggiate appartiene alla quadrica che, tagliando il piano all'infinito in una conica degenere (reale) è un paraboloide iperbolico; nell'altro caso si ha invece un iperboloide ad una falda. Come corollario del teorema superiore si ha l'altro:

F) Il luogo di una retta mobile g che si appoggia a tre rette fisse g_1, g_2, g_3 sghembe due a due, è un paraboloide iperbolico od un iperboloide ad una falda secondo che le tre rette fisse sono parallele ad un piano ovvero non parallele ad un piano.

(E infatti, per le considerazioni superiori, la retta mobile g segna sulle due fisse g_1, g_2 due punteggiate projettive simili nel primo caso, non simili nel secondo).

"§ 178"

L'iperboloide articolato

Consideriamo l'iperboloide ricoperto

dal suo doppio sistema di rette (I), (II). Per ogni punto della superficie passa una sola retta del sistema (I) ed una del sistema (II) ed il punto è individuato come intersezione di quelle due rette. La retta del sistema (I) è poi individuata dal valore del parametro φ (angolo ausiliario) e similmente una retta del sistema (II) dal valore del parametro ψ. Secondo i concetti generali di coordinate sulla superficie (§19), possiamo riguardare φ, ψ (o convenienti loro linee trigonometriche) come coordinate di un punto dell'iperboloide, riferito alle sue generatrici. Considerando le (I) (II) come simultanee, e risolvendo rapporto ad x, y, z, si hanno subito le formole

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi}, \quad \frac{y}{b} = \frac{1 - \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi}$$

$$\frac{z}{c} = \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi}$$

che possiamo anche scrivere, dopo semplici trasformazioni trigonometriche:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$$

Se prendiamo come nuovi parametri u, v delle generatrici in luogo di φ, ψ le loro linee trigono=

metriche

$$u = tg\frac{1}{2}\varphi, \quad v = tg\frac{1}{2}\psi,$$

le precedenti ci danno:

$$(q)\quad x = a\frac{1-uv}{1+uv}, \quad y = b\frac{u+v}{1+uv}, \quad z = c\frac{u-v}{1+uv}.$$

Queste esprimono le coordinate x, y, z di un punto P dell'iperboloide per le coordinate assintotiche u, v relative alle generatrici. Con una notazione consueta scriveremo $P \equiv (u, v)$.

Ora consideriamo due punti P_1, P_2 situati sopra una stessa generatrice, p. e. del 2° sistema, e calcoliamo la lunghezza $\delta = (P_1 P_2)$ del tratto di questa generatrice compreso fra P_1, P_2. Se supponiamo

$$P_1 \equiv (u_1, v), \quad P_2 \equiv (u_2, v)$$

e con x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 indichiamo le coordinate cartesiane di P_1, P_2 avremo per le (q):

$$\begin{cases} x_1 = a\dfrac{1-uv}{1+u_1 v}, & y_1 = b\dfrac{u_1+v}{1+u_1 v}, & z_1 = c\dfrac{u_1-v}{1+u_1 v} \\[2ex] x_2 = a\dfrac{1-u_2 v}{1+u_2 v}, & y_2 = b\dfrac{u_2+v}{1+u_2 v}, & z_2 = c\dfrac{u_2-v}{1+u_2 v} \end{cases}$$

e sottraendo deduciamo

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{u_2 - u_1}{(1+u_1 v)(1+u_2 v)} \cdot 2av, \quad y_1 - y_2 = \frac{u_2 - u_1}{(1+u_1 v)(1+u_2 v)} b(v^2 - 1), \\ z_1 - z_2 &= -\frac{u_2 - u_1}{(1+u_1 v)(1+u_2 v)} c(v^2+1). \end{aligned}\right.$$

Quadrando e sommando troviamo

$$(10) \quad \delta^2 = \overline{P_1 P_2}^2 = \frac{(u_2 - u_1)^2}{(1+u_1 v)^2 (1+u_2 v)^2} \left\{(b^2+c^2)(v^2-1)^2 + 4(a^2+c^2) v^2\right\}.$$

Similmente considerando una generatrice del 1° sistema, corrispondente ad un valore fisso di u, e calcolando il tratto d di questa generatrice compreso fra i due punti

$$(u, v_1) \quad , \quad (u, v_2).$$

troviamo

$$(10^*) \quad d^2 = \frac{(v_2 - v_1)^2}{(1+u_1 v)^2 (1+u_2 v)^2} \left\{(b^2+c^2)(u^2-1)^2 + 4(a^2+c^2) u^2\right\}.$$

La semplice osservazione: che in queste formole (10), (10*) i semiassi a, b, c dell'iperboloide figurano solo nelle combinazioni

$$a^2+c^2, \quad b^2+c^2$$

porta a conseguenze notevoli. Consideriamo un secondo iperboloide ad una falda cogli stessi piani principali del primitivo, sia

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

e supponiamo inoltre che si abbia

$$(11)\qquad \bar{a}^2+\bar{c}^2=a^2+c^2,\quad \bar{b}^2+\bar{c}^2=b^2+c^2$$

nel qual caso, per la ragione che apparirà nel Cap. seguente, i due iperboloidi si diranno confocali. Un punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ di questo secondo iperboloide sarà dato da formole come le (9)

$$(9^*)\qquad \bar{x}=\bar{a}\,\frac{1-uv}{1+uv},\quad \bar{y}=\bar{b}\,\frac{u+v}{1+uv},\quad \bar{z}=\bar{c}\,\frac{u-v}{1+uv};$$

e se diamo nelle (9), (9*) ad u, v una medesima coppia di valori del resto qualunque, avremo stabilita una corrispondenza fra i punti dei due iperboloidi rappresentata dalle formole

$$\bar{x}=\frac{\bar{a}}{a}\,x,\quad \bar{y}=\frac{\bar{b}}{b}\,y,\quad \bar{z}=\frac{\bar{c}}{c}\,z,$$

che sono quelle di una proiettività. È chiaro che ad ogni generatrice dell'uno corrisponderà una generatrice dell'altro, ma di più a causa delle (10), (10*) e delle (11), vediamo che tratti corrispondenti di generatrici saranno sempre eguali sui due iperboloidi.

Possiamo soddisfare in ∞^1 modi alle relazioni (11) ponendo

$$\bar{a}=\sqrt{a^2+\lambda},\quad \bar{b}=\sqrt{b^2+\lambda},\quad \bar{c}=\sqrt{c^2-\lambda}$$

e facendo variare il parametro λ (con continuità) entro l'intervallo $(-b^2, c^2)$. Le formole

$$(11)\quad x=\sqrt{a^2+\lambda}\,\frac{1-uv}{1+uv}\,,\quad y=\sqrt{b^2+\lambda}\,\frac{1-uv}{1+uv}\,,\quad z=\sqrt{c^2-\lambda}\,\frac{u-v}{1+uv}$$

definiscono dunque, per ogni valore fisso di λ entro l'intervallo $-b^2<\lambda<c^2$, un iperboloide (confocale) posto in tale corrispondenza (di projettività) col primitivo che le generatrici dell'uno corrispondono per tratti uguali alle generatrici dell'altro.

Immaginando il doppio sistema di generatrici dell'iperboloide come costituito da aste rigide, unite a cerniera nei loro punti d'incrociamento, vediamo adunque che un tale <u>iperboloide articolato</u> è deformabile e possiamo dire: <u>Un iperboloide articolato che si deforma, mantenendosi fissi il centro e gli assi, assume tutte le configurazioni degli iperboloidi confocali</u>.

Dalle formole effettive (11) si può poi dedurre facilmente che: in questa deformazione dell'iperboloide articolato ogni punto della superficie si muove nel senso normale alla superficie stessa.

§ 179.

Il doppio sistema di rette sul paraboloide iperbolico.

Scriviamo ora le equazioni del doppio sistema di rette giacenti sul paraboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Procedendo come al § 174 per l'iperboloide, vediamo che la retta di equazioni ridotte (2) giacerà sul paraboloide quando m, n, α, β soddisfino le tre relazioni

$$\frac{m^2}{p} = \frac{n^2}{q}, \quad \frac{\alpha^2}{p} = \frac{\beta^2}{q}, \quad \frac{m\alpha}{p} - \frac{n\beta}{q} = 1$$

ovvero, estraendo le radici quadrate dalle due prime, osservando la terza

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{m}{\sqrt{p}} = \pm \dfrac{n}{\sqrt{q}}, \quad \dfrac{\alpha}{\sqrt{p}} = \mp \dfrac{\beta}{\sqrt{q}} \\[2ex] \dfrac{m\alpha}{p} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Se si pone adunque $\frac{m}{\sqrt{p}} = \lambda$ e si accettano i segni superiori si avrà

$$\begin{cases} m = \sqrt{p}\cdot\lambda\ , & \alpha = \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} \\ n = \sqrt{q}\cdot\lambda\ , & \beta = -\dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda}\ , \end{cases}$$

dove λ è un parametro arbitrario. Così abbiamo un primo sistema di rette sul paraboloide dato dalle equazioni

$$(I^*)\qquad \begin{cases} x = \lambda\sqrt{p}\cdot z + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} \\ y = \lambda\sqrt{q}\cdot z - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda}\ . \end{cases}$$

ad ogni valore dato a λ corrispondendo una retta del sistema.

Prendendo invece nelle (a) i segni inferiori avremo l'altro sistema:

$$(II^*)\qquad \begin{cases} x = \mu\sqrt{p}\cdot z + \dfrac{\sqrt{p}}{2\mu} \\ y = -\mu\sqrt{q}\cdot z + \dfrac{\sqrt{q}}{2\mu}\ , \end{cases}$$

indicando anche qui con μ un parametro arbitrario.

Le proprietà A), B), dimostrate al § 175 per le generatrici dell'iperboloide, sussistono qui inalterate, come si dimostra nel medesimo modo;

ed ancora i due sistemi (I^*), (II^*) si distinguono per essere sinistrorso il primo, destrorso il secondo.

Le parallele tirate pel vertice del paraboloide alle generatrici del sistema (I^*) formano il piano

$$(12) \qquad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

e così le parallele a quelle del sistema (II^*) l'altro piano

$$(12^*) \qquad \frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{y}{\sqrt{p}} = 0.$$

Questi due piani passano per l'asse del paraboloide e rispettivamente per l'una o per l'altra generatrice uscente dal vertice; essi diconsi i piani direttori: le generatrici del sistema (I^*) sono tutte parallele al primo piano, quelle del sistema (II^*) al secondo piano direttore.

Ai teoremi C), D) del § 177 per l'iperboloide fanno qui riscontro gli altri due:

C*) Il paraboloide iperbolico può riguardarsi come il luogo di una retta mobile, che si appoggia a tre rette fisse g_1, g_2, g_3, sghembe due a due e parallele ad un piano.

D*) *Sopra due generatrici fisse di un sistema nel paraboloide, una generatrice mobile nel secondo segna due punteggiate simili.*

Le inverse di questi due teoremi vennero già dimostrate al § 177.

In fine le proprietà dell'iperboloide articolato (§ 178) sussistono ancora, come andiamo a dimostrare, per il paraboloide articolato. Consideriamo i parametri λ, μ come coordinate (assintotiche) di un punto sul paraboloide riferito ai due sistemi di generatrici. Dalle equazioni (I*)(II*) deduciamo le formole

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right), \quad z = \frac{1}{2\lambda\mu}$$

e ponendo $\frac{1}{2\lambda} = v$, $\frac{1}{2\mu} = u$ scriviamole

(13) $x = \sqrt{p}(u+v)$, $y = \sqrt{q}(u-v)$, $z = 2uv$;

queste ci danno le coordinate x, y, z di un punto del paraboloide espresse per le coordinate assintotiche (u, v). Calcolando il tratto δ di una generatrice (v) compreso fra i punti (u_1, v) (u_2, v) troviamo subito

$$\delta = (u_1 - u_2)\sqrt{p+q+4v^2};$$

e similmente pel tratto d di generatrice (u) com-

preso fra i due punti $(u, v_1), (u, v_2)$

$$d = (v_1 - v_2)\sqrt{p+q+4u^2}.$$

Osservando che in queste formole p, q entrano nella sola combinazione $p+q$, vediamo anche qui che: Un paraboloide iperbolico articolato può deformarsi con continuità assumendo tutte le configurazioni per le quali $p+q$ rimane costante.

Queste diverse configurazioni del paraboloide articolato, convenientemente collocate nello spazio, formano, come fra breve vedremo, un sistema di paraboloidi confocali. Basterà per ciò scrivere le formole (13) relative al paraboloide variabile sotto la forma

$$(13^*)\quad x = \sqrt{p+\lambda}\,(u+v), \quad y = \sqrt{q+\lambda}\,(u-v), \quad z = 2uv - \lambda$$

indicando con λ un parametro variabile nell'intervallo $(-q, p)$.

Anche qui risulta dalle (13^*) che ogni punto del paraboloide articolato si sposterà, in questa deformazione, nel senso normale alla superficie.

— Capitolo 17° —

Fuochi nelle quadriche e coniche focali

§ 180.

Triedro principale relativo ad un punto

Consideriamo una quadrica (irriducibile) ed un punto fisso O nello spazio. Se π è un piano qualunque per O e P è il polo di π, la retta OP sarà in generale obliqua al piano π: ora domandiamo: per quante posizioni del piano π attorno ad O riuscirà la retta OP normale a π?

Prendiamo O per origine degli assi ortogonali e siano cos α, cos β, cos γ i coseni di direzione della normale a π; questo piano avrà per equazione

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0;$$

e se riteniamo le solite notazioni per l'equazione della quadrica, le coordinate x', y', z' del polo P di π saranno (§ 144 formole (IV))

$$x'=\frac{A_{11}\cos\alpha+A_{12}\cos\beta+A_{13}\cos\gamma}{A_{41}\cos\alpha+A_{42}\cos\beta+A_{43}\cos\gamma},\quad y'=\frac{A_{21}\cos\alpha+A_{22}\cos\beta+A_{23}\cos\gamma}{A_{41}\cos\alpha+A_{42}\cos\beta+A_{43}\cos\gamma}$$

$$z'=\frac{A_{31}\cos\alpha+A_{32}\cos\beta+A_{33}\cos\gamma}{A_{41}\cos\alpha+A_{42}\cos\beta+A_{43}\cos\gamma}.$$

Perchè la retta OP sia normale a π è necessario e basta che sussista la proporzione

$$x':y':z'=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma,$$

ossia, per la (1), che si abbiano le tre relazioni:

$$(2)\quad\begin{cases}A_{11}\cos\alpha+A_{12}\cos\beta+A_{13}\cos\gamma=\rho\cos\alpha\\ A_{21}\cos\alpha+A_{22}\cos\beta+A_{23}\cos\gamma=\rho\cos\beta\\ A_{31}\cos\alpha+A_{32}\cos\beta+A_{33}\cos\gamma=\rho\cos\gamma\end{cases}$$

dove ρ è un conveniente fattore di proporzionalità. Secondo il §152, queste sono le equazioni stesse che si avrebbero per determinare le direzioni principali di una quadrica a centro la cui equazione fosse:

$$(3)\ A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz=\text{cost}^{te},$$

e la ragione geometrica di questo resultato apparirà ora subito.

Per brevità di linguaggio introduciamo ora le denominazioni seguenti. Diciamo direzione principale relativa al punto O una direzione uscente da O quando il polo del piano normale in A a quella direzione giace sulla retta stessa. Vediamo allora che: Se l'equazione cubica

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A_{11}-\rho & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\rho & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

ha le sue tre radici (sempre reali) semplici, esistono per O tre sole direzioni principali formanti una terna ortogonale.

In generale adunque per un punto arbitrario O dello spazio si ha un solo triedro (trirettangolo), i cui spigoli sono le tre direzioni principali relative ad O; questo si dirà il triedro principale del punto O.

È facile ora vedere che se si pone = 0 la costante del secondo nella (3): l'equazione

$$(3^*)\quad A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz=0$$

rappresenterà il cono supplementare (1) (reale od immaginario) di quello circoscritto da O alla quadrica.

E infatti il piano

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

tocca la quadrica quando è soddisfatta l'equazione tangenziale

---

(1) Per cono supplementare di un dato cono si intende quello formato dalle normali nel vertice ai piani tangenti del cono primitivo.

$$A_{11}\cos^2\alpha + A_{22}\cos^2\beta + A_{33}\cos^2\gamma + 2A_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2A_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2A_{23}\cos\beta\cos\gamma = 0;$$

un punto qualunque della normale al detto piano ha dunque coordinate

$$x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

che soddisfano la (3*).

Vediamo adunque che: il triedro principale relativo ad un punto O ha per facce i tre piani diametrali principali del cono (3*), ossia quelli del cono circoscritto.(1)

Si osservi però che (per una quadrica a punti ellittici) il cono circoscritto può essere reale od immaginario; ma i suoi tre piani principali sono sempre reali.

---

(1) Due coni supplementari hanno invero, come è chiaro geometricamente, gli stessi piani di simmetria. Analiticamente si osservi che se

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

è l'equazione normale di un cono quadrico, quella del cono supplementare è

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0.$$

§ 181.

Fuochi e coniche focali nelle quadriche a centro

Diremo che un punto F dello spazio è un fuoco della quadrica quando esistono pel punto infinite direzioni principali. Perchè ciò accada è necessario e sufficiente che l'equazione cubica (4) abbia radici multiple. In generale per un fuoco F l'equazione cubica (4) avrà una radice doppia ed una semplice; alla radice semplice corrisponderà una sola direzione principale per F ed alla doppia ne corrispondono invece ∞ giacenti nel piano normale alla prima. Il caso ulteriore che l'equazione cubica abbia un'unica radice (tripla) avviene solo nel caso particolare che il cono circoscritto da F sia il cono isotropo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

allora si può vedere facilmente (e risulterà anche dalla discussione seguente) che la quadrica è di rotazione ed F è un fuoco principale, cioè è situato sull'asse di rotazione in un fuoco della conica meridiana.

In generale se il punto F è un fuoco, il cono circoscritto da F ha indeterminato il triedro dei

piani principali ed è quindi un cono di rotazione; e viceversa, se il cono circoscritto da F è rotondo (di rotazione), il punto F è un fuoco. Dunque: Un fuoco di una quadrica è un punto dello spazio dal quale il cono circoscritto è rotondo. S'intende però che se ci limitiamo a considerare coni di rotazione reali, questa definizione dei fuochi vale soltanto per fuochi esterni.

Osserviamo ancora che per un punto qualunque sulla quadrica le tre direzioni principali sono quelle della normale alla superficie e delle due direzioni principali nel piano tangente. Il punto sarà un fuoco quando queste ultime due siano indeterminate cioè quando il punto è un ombelico della quadrica; dunque: i fuochi situati sulla quadrica sono tutti e soli gli ombelichi della quadrica.

Procediamo ora alla ricerca dei fuochi delle quadriche; come si vedrà questi non sono punti isolati ma riempiono linee continue le così dette coniche focali.

Cominciando dalle quadriche a centro, scriviamo l'equazione normale di una tale quadrica sotto la forma

$$(5)\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1.$$

Supposto che il punto (x_1, y_1, z_1) sia un fuoco della quadrica, trasportiamovi con una traslazione degli assi l'origine, dopo di che l'equazione (5) diventa:

$$(5^*)\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}+\frac{2x_1}{A}x+\frac{2y_1}{B}y+\frac{2z_1}{C}z+\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}+\frac{z_1^2}{C}-1=0.$$

I valori dei minori A_{ik} del discriminante per l'equazione (5*) sono dati dalle formole seguenti

$$\begin{cases} A_{11}=\dfrac{1}{BC}\left(\dfrac{x_1^2}{A}-1\right); & A_{22}=\dfrac{1}{CA}\left(\dfrac{y_1^2}{B}-1\right), \quad A_{33}=\dfrac{1}{AB}\left(\dfrac{z_1^2}{C}-1\right) \\ A_{12}=\dfrac{x_1y_1}{ABC}, & A_{23}=\dfrac{y_1z_1}{ABC}, \quad A_{31}=\dfrac{x_1z_1}{ABC}. \end{cases}$$

L'equazione cubica (4), postovi

$$ABC\cdot\rho=R,$$

diventa quindi

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} x_1^2-A-R & x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_1y_1 & y_1^2-B-R & y_1z_1 \\ x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2-C-R \end{vmatrix}=0;$$

e perchè il punto (x_1, y_1, z_1) sia un fuoco è necessario e sufficiente che esista un valore di R il quale annulli contemporaneamente i 6 minori di 2° grado nel determinante (6). Indicando con α_{ik}

questi minori, abbiamo

$$\alpha_{11}=(B+R)(C+R)-(C+R)y_1^2-(B+R)z_1^2,\quad \alpha_{22}=(C+R)(A+R)-(A+R)z_1^2-(C+R)x_1^2,$$
$$\alpha_{33}=(A+R)(B+R)-(B+R)x_1^2-(A+R)y_1^2$$

$$\alpha_{12}=(C+R)x_1y_1,\quad \alpha_{23}=(A+R)y_1z_1,\quad \alpha_{31}=(A+R)x_1z_1.$$

Se si esclude il caso della sfera, perchè si annullino insieme $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{13}$ occorre che almeno una delle tre coordinate del fuoco si annulli (1) dunque intanto: <u>ogni fuoco esiste necessariamente sopra uno dei tre piani diametrali principali</u>.

Dopo ciò basterà che ci limitiamo a cercare i fuochi sul piano xy; poichè per ottenere quelli sugli altri due piani principali non avremo che da permutare le lettere $(A, B, C)(x, y, z)$.

Ora se $z_1=0$, sono zero α_{23}, α_{31}, e, perchè lo sia anche α_{12}, dovremo avere

a) $\qquad R=-C,$

ovvero

b) $\qquad x_1=0 \quad o \quad y_1=0.$

Ma questo caso b) non differisce essenzialmente dal precedente perchè se p. e. $x_1=0$,

---

(1) altrimenti dovremmo avere

$$A=B=C=-R,$$

caso della sfera.

$z_1 = 0$ resta

$$\alpha_{22} = (A+R)(C+R)$$

quindi o $R=-C$ che è il caso stesso a) ovvero $R=-A$. che è ancora il caso A) scambiato x con z.

Basta dunque limitarci al caso a). Allora α_{11}, α_{22} risultano nulli e la condizione $\alpha_{33}=0$ dà

$$(\gamma) \qquad (B-C)x_1^2+(A-C)y_1^2=(B-C)(A-C).$$

Supposto $B \neq C$, $A \neq C$ (1) le coordinate $(x_1 y_1)$ di un fuoco sul piano xy debbono unicamente soddisfare l'equazione

$$(\delta) \qquad \frac{x_1^2}{A-C}+\frac{y_1^2}{B-C}=1;$$

dunque: __in ogni piano principale si ha una serie continua di fuochi costituenti una conica (reale od immaginaria). A questa si dà il nome di conica focale.__

Confrontando la conica focale (δ) colla conica principale

---

(1) Se p. e $B=C$ la superficie è di rotazione attorno all'asse Ox e la (γ) dà $y_1=0$ che insieme colla $z_1=0$ dimostra che tutti i punti dell'asse di rotazione sono fuochi come è geometricamente evidente.

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

si vede che: ogni conica focale ha gli stessi fuochi della corrispondente conica principale.

In generale la radice $R=-C$ della (6) sarà soltanto doppia cioè annullerà i minori di 2° ordine nel determinante (6) ma non tutti gli elementi (cf. §153). Perchè avvenga questo caso ulteriore bisognerà che si abbia ancora o $x_1=0$ o $y_1=0$, poniamo $x_1=0$ e successivamente

$$R=-A \quad y_1^2=B+R=B-A.$$

Dunque essendo $A=C$ la quadrica è di rotazione attorno all'asse y e la formola $y_1=\sqrt{B-A}$ mostra che il fuoco in considerazione è fuoco della curva meridiana

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1,$$

cioè è un fuoco principale, come sopra abbiamo asserito.

Ritornando al caso generale, vediamo che si hanno le tre coniche focali

(α) $\quad \dfrac{x^2}{A-C}+\dfrac{y^2}{B-C}=1$ nel piano xy

(β) $\quad \dfrac{y^2}{B-A}+\dfrac{z^2}{C-A}=1$ nel piano yz

$$(8) \qquad \frac{z^2}{C-B} + \frac{x^2}{A-B} = 1 \quad \text{nel piano } xz.$$

Però, se supponiamo che sia algebricamente

$$A > B > C,$$

la conica media (β) è immaginaria mentre le altre due sono reali e precisamente la (α) un'ellisse la (γ) un'iperbola.

È poi evidente che se A, B, C si aumentano di una medesima costante le coniche focali rimangono le stesse. Questo giustifica quanto abbiamo detto al § 178 riguardo alle configurazioni dell'iperboloide articolato, che sono effettivamente quelle di iperboloidi (ad una falda) confocali.

§ 182.

Coniche focali nei paraboloidi

Applichiamo ora il medesimo metodo alla ricerca dei fuochi di un paraboloide, la cui equazione normale scriviamo

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

Supposto che il punto (x_1, y_1, z_1) sia

un fuoco, e trasportatavi con una traslazione l'origine, l'equazione cubica (4), postovi

$$R = -ab\rho$$

diventa

$$\begin{vmatrix} a-R & 0 & x_1 \\ 0 & b-R & y_1 \\ x_1 & y_1 & 2z_1-R \end{vmatrix} = 0,$$

e si ha quindi in questo caso

$$\begin{cases} \alpha_{11} = (b-R)(2z_1-R)-y_1^2, & \alpha_{22} = (a-R)(2z_1-R)-x_1^2, & \alpha_{33} = (a-R)(b-R) \\ \alpha_{12} = x_1 y_1, & \alpha_{13} = (b-R)x_1, & \alpha_{23} = (a-R)y_1. \end{cases}$$

Si ha dunque necessariamente $R = a$ ovvero $R = b$, ma deducendosi il secondo caso dal primo scambiando x con y, supponiamo senz'altro $R = a$. Saranno allora

$$\alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$$

e perchè sia zero α_{13} (supposto $b \neq a$, cioè il paraboloide non rotondo) dovremo avere $x_1 = 0$, dopo di che α_{12}, α_{22} saranno nulli; e perchè lo sia anche α_{11} dovremo avere

$$y_1^2 = (b-a)(2z_1-a).$$

Dunque: il paraboloide (9) possiede le due parabole focali:

$$(10) \quad \begin{cases} y^2 = (b-a)(2z-a) & \text{nel piano } yz \\ x^2 = (a-b)(2z-b) & \text{nel piano } xz. \end{cases}$$

Queste sono evidentemente parabole

eguali rivolte in senso opposto, ed il vertice dell'una è fuoco dell'altra.

Ciascuna ha poi a comune l'asse ed il fuoco colla rispettiva parabola principale.

Anche qui si osserverà che l'equazione cubica in R ha una radice tripla nel solo caso che sia

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$R = a = b \qquad , \qquad z_1 = \frac{a}{2} ;$$

allora il paraboloide è di rotazione ed il fuoco F è precisamente nel fuoco della parabola meridiana (fuoco principale).

§ 183.

Coni rotondi projettanti una conica data.

Un problema strettamente collegato alla ricerca dei fuochi nelle quadriche e che si risolve coi medesimi mezzi è il seguente: Trovare il luogo dei vertici dei coni rotondi che projettano una conica data.

Sia dapprima una conica a centro di equazioni

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1 \\ z=0 \end{cases}$$ (in assi ortogonali)

e sia (x_1, y_1, z_1) un punto qualunque dello spazio, dal quale projettiamo la conica.

Per formare l'equazione del cono projettante cominciamo dal trasportare con una traslazione l'origine degli assi in (x_1, y_1, z_1) e le equazioni (11) della conica diverranno

$$(11^*)\quad \begin{cases} \dfrac{X^2}{A}+\dfrac{Y^2}{B}+\dfrac{2x_1}{A}X+\dfrac{2y_1}{B}Y+\dfrac{x_1^2}{A}+\dfrac{y_1^2}{B}-1=0 \\ Z=-z_1 \end{cases}$$

Le coordinate nuove di un punto qualunque (x, y, z) del cono saranno

$$x=kX,\quad y=kY,\quad z=kZ=-z_1$$

essendo $\underline{k}$ un fattore arbitrario di proporzionalità. Avremo quindi

$$X=-z_1\frac{x}{z},\quad Y=-z_1\frac{y}{z}$$

e sostituendo nella prima delle (11*) avremo:

$$(12)\quad \frac{z_1^2}{A}x^2+\frac{z_1^2}{B}y^2-\frac{2x_1z_1}{A}xz-\frac{2y_1z_1}{B}yz+\left(\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}-1\right)z^2=0,$$

e questa sarà l'equazione del cono projettante, riferita ai nuovi assi.

Perchè il cono sia rotondo occorre e basta

che esista un valore della incognita ρ che annulli tutti i minori del 2° ordine nel determinante

$$(12^*)\quad \begin{vmatrix} \frac{z_1^2}{A}-\rho & 0 & \frac{-x_1 z_1}{A} \\ 0 & \frac{z_1^2}{B}-\rho & \frac{-y_1 z_1}{B} \\ \frac{-x_1 z_1}{A} & \frac{-y_1 z}{B} & \frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}-1-\rho \end{vmatrix}$$

Indicando al solito questi minori con α_{ik}, abbiamo qui

$$\begin{cases} \alpha_{11}=\left(\frac{z_1^2}{B}-\rho\right)\left(\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}-1-\rho\right)-\frac{y_1^2 z_1^2}{B^2}, \quad \alpha_{22}=\left(\frac{z_1^2}{A}-\rho\right)\left(\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}-1-\rho\right)-\frac{x_1^2 z_1^2}{A^2}, \\ \alpha_{33}=\left(\frac{z_1^2}{A}-\rho\right)\left(\frac{z_1^2}{B}-\rho\right) \\ \alpha_{12}=\frac{x_1 y_1 z_1^2}{AB}, \quad \alpha_{13}=\frac{x_1 z_1}{A}\left(\frac{z_1^2}{B}-\rho\right), \quad \alpha_{23}=\frac{y_1 z_1}{B}\left(\frac{z_1^2}{A}-\rho\right). \end{cases}$$

Poichè naturalmente supponiamo $z_1 \neq 0$, l'annullarsi di α_{12} porta che sia $x_1 = 0$ ovvero $y_1 = 0$, e l'un caso deducendosi dall'altro cambiando (x,y), (A,B), possiamo supporre

$$x_1 = 0.$$

Se $y_1 \neq 0$ da $\alpha_{23} = 0$ risulterà

$$\rho = \frac{z_1^2}{A}$$

indi $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ e l'ultima condizione $\alpha_{11} = 0$ ci dà

(diviso per z_1^2)

$$\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{y_1^2}{B}-\frac{z_1^2}{A}-1\right)=\frac{y_1^2}{B},$$

ossia

$$\frac{y_1^2}{B-A}-\frac{z_1^2}{A}=1.$$

Abbiamo dunque nel piano $y\,z$ un primo luogo di vertici di coni rotondi richiesti e cioè la conica

$$(13)\qquad \frac{y^2}{B-A}-\frac{z^2}{A}=1.$$

Similmente nel piano $x\,z$ la seconda conica di equazione

$$(13^*)\qquad \frac{x^2}{A-B}-\frac{z^2}{B}=1;$$

e si vede ora subito che l'altra ipotesi $x_1=0$ $y_1=0$ dà soltanto punti della conica (13) o (13*) situati sull'asse Oz. Così i punti domandati, da cui la conica data

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

viene projettata secondo coni rotondi, sono allogati sulla conica (13) o sulla (13*); però di queste due coniche focali una sola è reale.

§ 184.

Coppie di coniche focali.

Se la conica data è l'ellisse

$$(14)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ponendo $A=a^2$, $B=b^2$ si vede che soltanto la seconda conica (13*) è reale ed è l'iperbola

$$(15)\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1;$$

viceversa il luogo dei coni rotondi projettanti l'iperbola (15) è l'ellisse (14). Queste diconsi una coppia di coniche focali l'una dell'altra; esse sono situate in piani normali intersecantisi secondo l'asse primario delle due coniche e ciascuna ha per fuochi i vertici dell'altra, per vertici i fuochi dell'altra. Osserviamo ancora che se si considera la quadrica a centro

$$(16)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1$$

dove al parametro λ possiamo dare un valore qualunque, questa quadrica avrà precisamente (§ 181) per coniche focali l'ellisse (14) e l'iperbola (15). Così il sistema di quadriche a cen=

tro (16) è un sistema di quadriche confocali.

Se prendiamo ora la parabola

$$(17)\qquad \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$$

e procediamo come sopra per la conica a centro (11) troviamo che il luogo dei vertici dei coni rotondi projettanti la parabola è l'altra parabola

$$(17^*)\qquad \begin{cases} z^2 = -2p\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ y = 0 . \end{cases}$$

Queste due parabole (17), (17*), in piani perpendicolari per l'asse comune, hanno ciascuna il fuoco nel vertice nel vertice e nel fuoco dell'altra; e ciascuna è il luogo dei vertici dei coni rotondi projettanti l'altra parabola.

Dimostriamo ora il teorema:

<u>L'asse del cono di rotazione che projetta da un punto (fuoco) la conica è la tangente in quel punto alla conica focale.</u>

Prendiamo p. e. il caso della conica a centro e da un punto $(0, y_1, z_1)$ sulla conica focale (13) projettiamo la prima. L'asse del cono rotondo projettante sarà la direzione (principale) $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ corrispondente alla ra-

dice semplice dell'equazione cubica

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1^2}{A} - \rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_1^2}{B} - \rho & -\frac{y_1 z_1}{B} \\ 0 & -\frac{y_1 z_1}{B} & \frac{y_1^2}{B} - 1 - \rho \end{vmatrix} = 0$$

ottenuta dall'eguagliare a zero il determinante (12*) dopo averci fatto $x_1 = 0$. La radice doppia è $\rho = \frac{z_1^2}{A}$ e la semplice è l'ulteriore radice (oltre $\frac{z_1^2}{A}$) dell'equazione di 2° grado

$$\rho^2 - \rho\left(\frac{y_1^2 + z_1^2}{B} - 1\right) - \frac{z_1^2}{B} = 0;$$

questa radice semplice ρ_3 è adunque

$$\rho_3 = -\frac{A}{B}.$$

Dopo ciò le tre equazioni lineari omogenee da cui risultano determinanti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ saranno

$$\begin{cases} \left(\frac{z_1^2}{A} + \frac{A}{B}\right)\cos\alpha = 0 \\ \frac{z_1^2 + A}{B}\cos\beta - \frac{y_1 z_1}{B}\cos\gamma = 0 \\ -\frac{y_1 z_1}{B}\cos\beta + \frac{y_1^2 + AB}{B} = 0 \end{cases}$$

le due ultime delle quali coincidono essendo

$$\frac{y_1^2}{B-A} - \frac{z_1^2}{A} = 1.$$

Abbiamo dunque

$$\cos\alpha = 0 \quad \cos\beta : \cos\gamma = \frac{y_1 z_1}{B} : \frac{z_1^2 + A}{B},$$

ossia

$$\cos\alpha = 0 \quad \cos\beta : \cos\gamma = (B-A) z_1 : A y_1.$$

Dunque il detto asse di rotazione è nel piano yz ed ha ivi per equazione

$$\frac{y - y_1}{(B-A) z_1} = \frac{z - z_1}{A y_1}$$

ossia

$$\frac{y y_1}{B-A} - \frac{z z_1}{A} = 1,$$

che è precisamente l'equazione della tangente alla conica focale (13) nel punto (y_1, z_1), c. d. d.

§ 185.

Assi focali e direttrici

Ritornando ai fuochi nelle quadriche, ricordiamo che se F è un fuoco la retta r per F nella direzione principale corrispondente

alla radice semplice dell'equazione cubica gode della proprietà che qualunque coppia ortogonale di piani condotti per r è formata di piani coniugati rispetto alla quadrica, ed inoltre i poli di questi piani sono situati sul piano perpendicolare in F alla r. Diremo la retta r asse focale; se il fuoco F è esterno alla quadrica vediamo subito che:

l'asse focale r è l'asse del cono rotondo circoscritto da F alla quadrica.

La posizione dell'asse focale in relazione alla conica focale per F viene assegnata dal teorema:

L'asse focale di un punto F è la tangente in F alla conica focale. Questo si dimostra precisamente come al § prec. il teorema analogo per gli assi dei coni di rotazione projettanti una conica data.

La retta d polare reciproca rispetto alla quadrica dell'asse focale r dicesi la direttrice del fuoco F; essa è il luogo dei poli dei piani condotti per r, e giace quindi nel piano normale in F all'asse focale. Poichè inoltre fra i piani per r vi è pure il piano (principale) della conica focale il cui polo è all'infinito nella direzio-

ne normale, la direttrice d è perpendicolare a questo piano. Il piede della direttrice è il polo di r rispetto alla conica principale corrispondente. Dunque: La direttrice di un fuoco F è la perpendicolare al piano della conica focale nel polo della tangente in F a questa conica, preso rispetto alla conica principale.

Osserviamo ora che il piano normale in F all'asse focale sega la quadrica in una conica Γ rispetto alla quale F è il polo di d, e poichè l'involuzione delle coppie di punti coniugati sopra d è projettata da F secondo una involuzione ortogonale di raggi, ne deduciamo:

Il piano che passa pel fuoco F e per la corrispondente direttrice d taglia la quadrica secondo una conica di cui F è un fuoco e d la relativa direttrice.

In particolare: Due vertici opposti di una conica focale sono i fuochi di una conica principale.

§ 186.

Distanza di un punto di una quadrica da un fuoco.

Si consideri dapprima una quadrica (5) a centro

$$(5) \qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

ed una sua conica focale, p. e. la (8)

$$(8) \qquad \frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1.$$

Preso in questa un fuoco qualunque $F_1 \equiv (x_1, y_1, 0)$ e sulla quadrica un punto variabile $M \equiv (x, y, z)$, si calcoli la distanza ρ di M da F_1. Abbiamo

$$\rho^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2$$

ed eliminandone z per mezzo dell'equazione (5) della quadrica:

$$(18) \qquad \rho^2=\left(1-\frac{C}{A}\right)x^2+\left(1-\frac{C}{B}\right)y^2-2x_1x-2y_1y+C+x_1^2+y_1^2.$$

Il discriminante della funzione quadratica del 2° membro è

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{C}{A} & 0 & -x_1 \\ 0 & 1-\frac{C}{B} & -y_1 \\ -x_1 & -y_1 & C+x_1^2+y_1^2 \end{vmatrix} = \frac{C}{AB}(A-C)(B-C)\left\{1-\frac{x_1^2}{A-C}-\frac{y_1^2}{B-C}\right\},$$

e questo è nullo a causa della (8). Dunque la funzione quadratica del 2.° membro della (18) è il prodotto di due fattori lineari in x, y, i quali sono reali od immaginarî (coniugati) secondo che

$$1-\frac{C}{A}, \quad 1-\frac{C}{B}$$

hanno segno opposto od eguale. In ogni caso la (18) si porrà sotto la forma

$$(18^*)\quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2=\left(1-\frac{C}{A}\right)(x-\alpha)^2+\left(1-\frac{C}{B}\right)(y-\beta)^2,$$

dove α, β sono da calcolarsi dalle equazioni

$$\left(1-\frac{C}{A}\right)\alpha - x_1 = 0, \quad \left(1-\frac{C}{B}\right)\beta - y_1 = 0,$$

e quindi

$$\alpha = \frac{Ax_1}{A-C}, \quad \beta = \frac{By_1}{B-C}.$$

La polare del punto (α, β) rispetto alla conica principale

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

e quindi la retta

$$\frac{\alpha x_1}{A-C} + \frac{\beta y_1}{B-C} = 1,$$

e coincide colla tangente in $(x_1 y_1)$ alla conica focale, vale a dire coincide coll'asse focale.

Dunque la retta $x=\alpha$, $y=\beta$ è la direttrice del fuoco F.

Supponiamo che siano

$$1-\frac{C}{A}, \quad 1-\frac{C}{B}$$

di segno contrario, p. e.

$$1-\frac{C}{A}>0, \quad 1-\frac{C}{B}<0.$$

Scindendo il secondo membro della (18*) nei suoi due fattori lineari

$$L=\sqrt{1-\frac{C}{A}}\,(x-\alpha)-\sqrt{\frac{C}{B}-1}\,(y-\beta)$$

$$M=\sqrt{1-\frac{C}{A}}\,(x-\alpha)+\sqrt{\frac{C}{B}-1}\,(y-\beta),$$

la (18*) si scrive

$$(19) \qquad \rho^2 = L.M.$$

I due piani $L=0$ $M=0$ sono paralleli ai piani centrali ciclici (§170)

$$\sqrt{1-\frac{C}{A}}\,x \pm \sqrt{\frac{C}{B}-1}\,y = 0\,;^{(1)}$$

e se indichiamo con δ, δ_1 le distanze del punto (x, y, z) della quadrica dai due piani ciclici $L=0$, $M=0$ abbiamo

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{C\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)}}\,,\quad \delta_1 = \frac{M}{\sqrt{C\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)}}$$

e perciò la (19) si scrive

$$(20)\qquad \rho^2 = C\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right).\,\delta\delta_1.$$

Ora un fuoco F pel quale i due piani ciclici $L=0$ $M=0$ siano reali si dice di 1.ª specie ed invece di 2.ª specie se quei due piani sono immaginarî. È chiaro che una conica focale o è tutta composta di fuochi di 1ª specie, ovvero tutta di fuochi di 2.ª specie. Le coniche focali di 2.ª specie non incontrano

---

(1) Questo si vede anche osservando che un piano $L=$cost. o $M=$cost. sega la quadrica (19) secondo una conica lungo la quale è

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2 = ax+by+c;$$

questa essendo l'equazione di una sfera la sezione suddetta è circolare.

in punti reali la quadrica poichè il 2° membro della (18*) si annulla solo per $x=\alpha$ $y=\beta$ e non può quindi il fuoco $(x_1, y_1, 0)$ trovarsi sulla quadrica.

Invece le coniche focali di 1ª specie incontrano la quadrica (normalmente) negli ombelichi, poichè questi sono fuochi situati sulla quadrica. Naturalmente le coniche focali di 1.ª specie esistono solo per le quadriche a punti ellittici.

Dopo ciò vediamo che la relazione data dalla (23) esprime la seguente proprietà dei fuochi di 1ª specie, che facilmente si dimostrerebbe essere caratteristica per questi fuochi.

Il quadrato della distanza di un punto mobile sulla quadrica da un fuoco di 1ª specie conserva un rapporto costante al prodotto delle distanze del medesimo punto dai due piani ciclici condotti per la corrispondente direttrice; e questo rapporto non varia spostando il fuoco nella sua conica focale.

Per i fuochi di 2ª specie la corrispondente proprietà metrica assume una forma diversa che non staremo qui a ricercare.

§ 187.

Relazioni fra le distanze di un punto di una conica da due punti fissi sulla conica focale.

Alle proprietà metriche sopra studiate pei fuochi di una quadrica fanno riscontro per le coppie di coniche focali l'una dell'altra le seguenti che generalizzano quelle dei fuochi ordinari nel piano della conica:

La somma o la differenza delle distanze di un punto mobile sopra una conica da due punti fissi qualunque sulla conica focale è costante.

Si consideri dapprima un'ellisse

$$(\alpha) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e la sua iperbola focale

$$(\beta) \qquad \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Se $P_1 \equiv (x_1, y_1, 0)$ è un punto dell'ellisse (α) e $P \equiv (x, 0, z)$ un punto dell'iperbola focale (β), per la distanza (P_1P) abbiamo

$$|P_1P|^2 = (x_1 - x)^2 + y_1^2 + z^2;$$

ossia, essendo

$$y_1^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 , \quad z^2 = \frac{b^2}{a^2-b^2} x^2 - b^2 ,$$

avremo

$$|P_1 P|^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} x_1^2 - 2 x x_1 + \frac{a^2}{a^2-b^2} x^2 .$$

Ponendo come al solito

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e ,$$

questa si scrive

$$(21) \qquad |P_1 P|^2 = \left(\frac{x}{e} - e x_1 \right)^2 .$$

Supponendo, per fissare le idee, che P sia sul ramo d'iperbola ove $x > 0$, sarà

$$x > \sqrt{a^2-b^2} > a c$$

e però

$$\frac{x}{e} > e x_1$$

e quindi la (21) ci dà

$$(21^*) \qquad |P_1 P| = \frac{x}{e} - e x_1 ,$$

formola il cui secondo membro dobbiamo scrivere col segno opposto se P appartiene all'altro ramo d'iperbola. Ciò posto sia P' un altro punto dell'iper-

bola; avremo

$$|P_1P'| = \pm\left(\frac{x'}{e} - e\,x_1\right)$$

valendo il segno superiore se P' appartiene al ramo di P_1, l'inferiore al ramo opposto. Di qui abbiamo corrispondentemente

$$|P_1P| \mp |P_1P'| = \frac{x - x'}{e}$$

e quindi il teorema: Le distanze di un punto mobile sull'ellisse da due punti qualunque fissi sull'iperbola focale hanno costante la somma o la differenza secondo che questi due punti appartengono a rami opposti dell'iperbola o al medesimo ramo.

Se poi P_2 è un altro punto qualunque dell'ellisse avremo

$$|P_2P| = \frac{x}{e} - e\,x_2,$$

indi

$$|P_1P| - |P_2P| = e(x_2 - x_1);$$

dunque: È costante la differenza delle distanze di un punto mobile sopra l'iperbola da due punti fissi qualunque sull'ellisse focale.

Quando la coppia di coniche focali sia composta di parabole, la proprietà corrispondente

assume ancora quest'ultima forma cioè: La differenza delle distanze di un punto mobile sulla parabola da due punti fissi qualunque della parabola focale è costante.

§ 188"

Quadriche a centro confocali

Abbiamo già più volte avuto occasione di accennare a quadriche confocali, aventi cioè a comune le coniche focali. Qui vogliamo da ultimo esporre brevemente le proprietà fondamentali del sistema così di quadriche confocali, limitandoci però al caso più importante delle quadriche a centro. Tali quadriche hanno a comune il centro ed i piani diametrali e principali e poichè fra di esse vi sono sempre anche degli ellissoidi, basterà che assumiamo un ellissoide fondamentale

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dove supporremo al solito

$$a^2>b^2>c^2$$

e scriviamo l'equazione più generale di una quadrica confocale. Questa sarà

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

dove dovremo avere soltanto (§ 181)

$$A-a^2=B-b^2=C-c^2,$$

ed indicando con λ questa differenza comune, avremo dunque: <u>Le quadriche (a centro) del sistema confocale sono rappresentate dall'equazione</u>

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

<u>ad ogni valore del parametro λ corrispondendo una quadrica del sistema</u>.

Osserviamo subito che quando $\lambda<-a^2$ la quadrica è un ellissoide immaginario e spezzando l'intervallo da $+\infty$ a $-a^2$ nei tre

$$(+\infty,-c^2)\quad(-c^2,-b^2)\quad(-b^2,-a^2)$$

si vede che la quadrica (22) è un ellissoide, un iperboloide ad una o a due falde secondo che λ giace nel primo, nel secondo ovvero nel terzo l'intervallo. È utile osservare come avviene il passaggio dall'una all'altra delle tre specie di quadriche mentre λ attraversa i valori limiti $-c^2-b^2$. Se poniamo

$$\lambda=c^2+\varepsilon^2$$

con ε piccolissimo e convergente a zero abbiamo l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2-c^2+\varepsilon^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2+\varepsilon^2}+\frac{z^2}{\varepsilon^2}=1,$$

il cui asse minimo ε va sempre più decrescendo finchè al limite per $\varepsilon=0$ l'ellissoide si riduce alla regione di piano xy interna alla ellisse focale.

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1.$$

Se invece poniamo $\lambda=-c^2-\varepsilon^2$ e facciamo tendere ε nuovamente a zero l'iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{a^2-c^2-\varepsilon^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2-\varepsilon^2}-\frac{z^2}{\varepsilon^2}=1$$

si riduce alla regione di piano xy esterna all'ellisse focale. Così questa ellisse separa la serie degli ellissoidi da quella degli iperboloidi. E nel medesimo modo l'iperbola focale

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$$

separa le due serie di iperboloidi

La natura geometrica del sistema confocale (22) si riconosce nel modo migliore ricorrendo alla equazione tangenziale del sistema. Questa si scrive

$$(a^2+\lambda)\xi_1^2+(b^2+\lambda)\xi_2^2+(c^2+\lambda)\xi_3^2-\xi_4^2=0$$

~~assia~~

$$(A) \qquad a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2 + c^2\xi_3^2 - \xi_4^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = 0$$

e contiene linearmente il parametro λ; ~~essa~~ pone in relazione il sistema confocale col circolo assoluto. I piani tangenti al circolo assoluto (isotropi) ed alla quadrica formano una sviluppabile (della 4ª classe) che dicesi la sviluppabile isotropa circoscritta alla quadrica. Siccome un piano isotropo è caratterizzato dalla relazione

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$$

fra le sue coordinate, la (A) dimostra che: le quadriche del sistema confocale sono tutte e sole quelle che hanno a comune la sviluppabile isotropa circoscritta.

Esse formano una schiera di quadriche inscritte in questa sviluppabile.

§ 189.

Il sistema delle quadriche confocali come sistema triplo ortogonale.

Prendiamo ora un piano arbitrario dello spazio, sia

$$(23)' \qquad Ax + By + Cz = 1.$$

la sua equazione, e domandiamo quale è la linea luogo dei suoi poli rispetto alle quadriche del sistema (22). Se (x_1, y_1, z_1) è il polo del piano (23) l'equazione del piano polare

$$\frac{x x_1}{a^2+\lambda} + \frac{y y_1}{b^2+\lambda} + \frac{z z'}{c^2+\lambda} = 1$$

deve coincidere colla (23) e si ha quindi

$$x_1 = A(a^2+\lambda), \quad y_1 = B(b^2+\lambda), \quad z_1 = C(c^2+\lambda).$$

Eliminando λ da queste, resulta:

Il luogo dei poli del piano (23) rispetto alle quadriche del sistema confocale è la retta di equazioni

$$\frac{x}{A} - a^2 = \frac{y}{B} - b^2 = \frac{z}{C} - c^2,$$

retta che è normale al piano.

Ne segue che fra le quadriche del sistema confocale ve ne ha una ed una soltanto che tocca il piano dato. Il punto di contatto è il piede P della normale ora considerata al detto piano π.

Se ora consideriamo un punto P arbitrario dello spazio ed una r delle tre direzioni principali uscenti da P rispetto ad una determinata quadrica del sistema, risulta da quanto precede che la retta r sarà il luogo dei poli

del suo piano normale in P rispetto a tutte le quadriche del sistema. Quella direzione v'è adunque principale rispetto a P per tutte le quadriche del sistema ed in particolare è la normale in P ad una quadrica del sistema. Siccome vi sono tre direzioni principali uscenti da P e formanti una terna ortogonale, ne deduciamo l'importante teorema:

<u>Per ogni punto P dello spazio passano tre quadriche del sistema confocale ed ivi si tagliano due a due ortogonalmente, le loro tre normali in P formando il triedro principale (trirettangolo) comune a tutte le quadriche del sistema.</u>

Confermiamo ora direttamente questi risultati sulla equazione (22) del sistema confocale. Preso un punto qualunque (x_1, y_1, z_1) dello spazio, le quadriche del sistema (22) che vi passano corrispondono ai valori di λ che soddisfano la relazione

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda} + \frac{z_1^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

ossia l'equazione di 3° grado in λ

$$(23)\quad f(\lambda) = (\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2) - x_1^2(\lambda+b^2)(\lambda+c^2) - y_1^2(\lambda+c^2)(\lambda+a^2) - z_1^2(\lambda-a^2)(\lambda-b^2) = 0.$$

Ora i segni di

$$f(-a^2), \quad f(-b^2), \quad f(-c^2)$$

sono alternatamente

$$- \quad + \quad -$$

mentre il segno di $f(\lambda)$ per λ positivo e abbastanza grande è evidentemente positivo.

Dunque l'equazione $f(\lambda)=0$ ha una radice reale in ciascuno degli intervalli

$$(+\infty, -c^2) \quad (-c^2, -b^2) \quad (-b^2, -a^2);$$

indicandole con λ_1, λ_2 λ_3 rispettivamente, vediamo che sono tutte tre reali e quindi:

Per un punto arbitrario dello spazio passano tre quadriche del sistema confocale (22) e precisamente 1° un ellissoide, 2° un iperboloide ad una falda, 3° un iperbolide a due falde rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$(24) \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_2} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda_2} = 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_3} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_3} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda_3} = 1 . \end{cases}$$

Verifichiamo ora facilmente che due quadriche di queste qualunque sono ortogo-

nali fra loro nel punto (x_1, y_1, z_1) ove s'incontrano. E invero i due piani tangenti p. e. alle due prime quadriche in (x_1, y_1, z_1) hanno le equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x x_1}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y y_1}{b^2+\lambda_1} + \dfrac{z z_1}{c^2+\lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x x_1}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{y y_1}{b^2+\lambda_2} + \dfrac{z z_1}{c^2+\lambda_2} = 1 \end{cases}$$

e la loro ortogonalità resulta dalla identità

$$\frac{x_1^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y_1^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} + \frac{z_1^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)} = 0,$$

che risulta sottraendo le due

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y_1^2}{b^2+\lambda_1} + \dfrac{z_1^2}{c^2+\lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x_1^2}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{y_1^2}{b^2+\lambda_2} + \dfrac{z_1^2}{c^2+\lambda_2} = 1. \end{cases}$$

"§190"

Linee di curvatura delle quadriche a centro

Sopra una quadrica qualunque E della schiera confocale le quadriche degli

altri due sistemi segnano un doppio sistema di linee, ortogonali fra loro, che in ogni punto P hanno per tangenti le due normali a quelle due quadriche, cioè le direzioni principali della quadrica E nel punto B. Le linee di questo doppio sistema ortogonale prendono il nome di linee di curvatura della quadrica, e sono appunto caratterizzate dalla proprietà di avere in ogni punto per direzione una delle due direzioni principali. Queste nozione di direzioni principali e di linee di curvatura delle quadriche sono tanto più importanti che possono poi estendersi a qualunque superficie, come si dimostra nelle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.

Qui, limitatamente alle quadriche, vogliamo soltanto stabilire quel significato geometrico delle direzioni principali che si trasporta poi al caso di una superficie qualunque. Perciò conviene prima che riprendiamo una questione già accennata nella teoria delle coniche (§107) e determiniamo il circolo osculatore di una conica in un punto. Considerando una conica C ad un suo punto O, fra i circoli condotti nel piano sulla conica per O tangenzial-

mente alla conica ve ne ha uno determinato (come ora dimostreremo) pel quale un terzo punto d'incontro del circolo colla conica viene a cadere in O stesso; questo è appunto il circolo che dicesi osculatore alla conica in O (1) ed il suo raggio prende il nome di raggio di curvatura.

Riferendo la conica ad un sistema di assi ortogonali coll'origine in O e coll'asse Ox nella direzione della tangente, la sua equazione sarà

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0, \tag{25}$$

ovvero esprimendo colle formole (19) § 101 le coordinate x, y di un punto mobile sulla conica in funzione razionale di un parametro t avremo

$$x = -\frac{2a_{23}t}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2}\,, \quad y = -\frac{2a_{23}t^2}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2}. \tag{26}$$

Consideriamo ora un circolo che tocchi in O la conica e quindi l'asse Ox. Se h è l'ordinata del suo centro la sua equazione sarà

$$x^2 + (y + h)^2 = h^2$$

cioè

---

(1) Esso è il circolo che più di tutti gli altri si accosta alla curva nell'intorno del punto O.

$$(27) \qquad x^2+y^2-2hy=0.$$

Per determinare i punti d'intersezione del circolo colla conica basta determinare le radici della equazione di 4° grado in $\underline{t}$ che si ha ponendo nella (27) i valori (26) di x, y cioè dell'equazione:

$$a_{23}^2 t^2(1+t^2)+h a_{23} t^2 (a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)=0.$$

Questa ha una radice doppia $t=0$, corrispondente ai due punti d'intersezione riuniti in O, e perchè anche un terzo punto d'intersezione cada in O conviene che la radice $t=0$ sia tripla cioè che l'equazione di 2° grado

$$a_{23}^2(1+t^2)+h a_{23}(a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2)$$

abbia ancora una radice nulla, il che da

$$(28) \qquad h=-\frac{a_{23}}{a_{11}}. \text{ (1)}$$

Così abbiamo dimostrato l'esistenza e l'unicità del circolo osculatore, ed abbiamo la formola (28) che assegna il raggio $R=|h|$ di curvatura

---

(1) Si osservi di passaggio che tutti e quattro i punti d'intersezione saranno riuniti in O nel solo caso che sia $a_{12}=0$. Il punto O è allora un <u>vertice</u> della conica; ivi soltanto il circolo osculatore iperoscula la conica.

della conica (25) nell'origine O.

Ciò premesso, prendiamo ora sopra una quadrica a centro un punto qualunque D e conduciamo per la normale un fascio di piani che produrranno nella quadrica una serie di sezioni coniche (sezioni normali) aventi ciascuna in O un determinato raggio di curvatura. Esaminiamo come varia questo raggio al variare della sezione normale. Se prendiamo gli assi ortogonali coll'origine in O e coll'asse delle z nella direzione della normale, l'equazione della superficie sarà:

(29) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{34}z=0$

e se, con una traslazione degli assi, trasportiamo l'origine nel centro, l'equazione diventerà

(29*) $a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{13}XY+2a_{23}YZ=k$ (k cost.^{e})

e l'equazione

$$(30) \qquad a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=k$$

rappresenterà la sezione centrale Γ nel piano parallelo al piano tangente in O. Ora le sezioni della quadrica coi piani xz, yz hanno, per la (28) in O raggi di curvatura dati da

$$\left|\frac{a_{34}}{a_{11}}\right| \qquad \left|\frac{a_{34}}{a_{22}}\right|$$

e queste espressioni sono proporzionali per la (30) ai quadrati dei semidiametri della sezione centra-

le I' nella direzione Ox Oy rispettivamente poichè questi sono dati da

$$\frac{k}{a_{21}} , \frac{k}{a_{22}} .$$

Se ora si osserva che girando gli assi coordinati ortogonale x, y non cangia nè a_{34} nella (29) nè k nella (30) ne deduciamo: I raggi di curvatura delle sezioni normali per O variano proporzionalmente ai quadrati dei semidiametri della sezione centrale condotti parallelamente alle direzioni secondo cui le respettive sezioni normali escono da O.

Di qui resulta questa nuova definizione delle direzioni principali in un punto O:

Le direzioni principali sono quelle che corrispondono al massimo e minimo raggio di curvatura delle sezioni normali.

È pur altro da osservarsi che per l'esattezza di questa proprietà conviene aver riguardo non solo al valore assoluto ma ben anche al segno del raggio di curvatura come vien dato dalla formola (28).

La nozione di raggio di curvatura viene estesa dall'analisi infinitesimale ad una curva qualunque ed allora, come Eulero pel primo riconobbe, la variazione del raggio di curvatu-

ca delle sezioni normali di un punto di una superficie qualsiasi segue le medesime leggi come per le quadriche.

Così per una superficie qualunque abbiamo in ogni punto due determinate direzioni principali (ortogonali fra loro) secondo le quali le sezioni normali presentano il massimo ed il minimo raggio di curvatura.

Così pure sopra una qualunque superficie esiste un doppio sistema (ortogonale) di linee che in ogni punto seguono una direzione principale. Esse diconsi le linee di curvatura della superficie e furono scoperte da Monge.

§ 191.

Coordinate ellittiche

Daremo termine a queste lezioni accennando come le proprietà del sistema di quadriche confocali conducono alle coordinate ellittiche introdotte nell'analisi da Lamé. Un punto dello spazio risulta individuato dalle tre quadriche del sistema confocale (22) che passano per quel punto. Ciascuna quadrica viene poi individuata nel proprio sistema dal valore corrispondente del

parametro λ è precisamente, nelle notazioni del §189:

l'ellissoide dalla radice λ_1 della (23)

l'iperboloide ad una falda da λ_2

l'iperboloide a due falde da λ_3.

Questi tre parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ possono adunque assumersi come coordinate del punto e diconsi appunto le coordinate ellittiche del punto. Date le coordinate cartesiane x_1, y_1, z_1 di un punto P_1, le sue coordinate ellittiche si ottengono come radici della equazione di 3° grado (23) in λ.

Se vogliamo esprimere inversamente le coordinate cartesiane per le ellittiche basterà osservare che dall'identità

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\lambda}-\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}-\frac{z_1^2}{c^2+\lambda}\right)=f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

facendo successivamente $\lambda=-a^2$, $\lambda=-b^2$, $\lambda=-c^2$, si ricava

$$(a^2-b^2)(a^2-c^2)x_1^2=(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)$$
$$(b^2-c^2)(b^2-a^2)y_1^2=(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)$$
$$(c^2-a^2)(c^2-b^2)z_1^2=(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3),$$

onde si traggono appunto i valori cercati di x_1, y_1, z_1, espressi per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. (1)

---

(1) Come è naturale una terna di valori $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$

Spesso si introducono come coordinate ellittiche i valori u, v, w dei semiassi primarii dell'ellissoide e dei due iperboloidi, si pone cioè

$$a^2+\lambda_1 = u^2 \quad a^2+\lambda_2 = v^2; \quad a^2+\lambda_3 = w^2$$

e le formole superiori, ponendo per brevità

$$a^2-b^2=h^2, \quad a^2-c^2=k^2$$

si scrivono quindi:

$$\begin{cases} x_1^2 = \dfrac{u^2v^2w^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y_1^2 = \dfrac{(u^2-h^2)(v^2-h^2)(w^2-h^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z_1^2 = \dfrac{(u^2-k^2)(v^2-k^2)(w^2-k^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

---

da cosi 8 punti $(x, y, z,)$ simmetricamente posti negli 8 triedri dei piani principali.

Pag.	Linea	Errata	Corrige
17	4ª dal basso	$n(x-x_1)=m(x_2-x_1)$	$n(x-x_1)=m(x_2-x)$
25	5 " "	$(x_1 x_3 x_2 x_4)=\frac{1}{(x_1 x_2 x_3 x_4)}$	$(x_1 x_2 x_3 x_4)=\frac{1}{(x_1 x_2 x_4 x_3)}$
30	7 dall'alto	$\lambda=1$. Ma anche questo caso è impossibile essendo distinti i quattro elementi	$\lambda=2$. Il primo caso è impossibile coi quattro elementi distinti; il secondo riconduce al caso armonico(.
38	6 " "	$(a_1 a_2 a_3 a_4)=\frac{sen(\widehat{a_3 a_1})\cdot sen(\widehat{a_4 a_2})}{sen(\widehat{a_2 a_1})\cdot sen(\widehat{a_3 a_2})}$	$(a_1 a_2 a_3 a_4)=\frac{sen(\widehat{a_3 a_1})\cdot sen(\widehat{a_4 a_2})}{sen(\widehat{a_4 a_1})\cdot sen(\widehat{a_3 a_2})}$
50	1 dal basso	manifestandoti	manifestamente
51	1 " "	Per farm....	Per fissare la....
52	9 dall'alto	$O'Q'=Y$	$O'Q'=X$
"	2 dal basso	$O'Y$	$O'X$
61	2 " "	$\widehat{OX}, \widehat{OY}$	$\widehat{xX}, \widehat{xY}$
65	2 dall'alto	$X=\frac{sen\beta}{sen(\beta-\alpha)}x+\frac{sen(\omega-\beta)}{sen(\beta-\alpha)}y$	$X=\frac{sen\beta}{sen(\beta-\alpha)}x-\frac{sen(\omega-\beta)}{sen(\beta-\alpha)}y$
"	3 " "	$Y=\frac{sen\alpha}{sen(\beta-\alpha)}x+\frac{sen(\omega-\alpha)}{sen(\beta-\alpha)}y$	$Y=\frac{-sen\alpha}{sen(\beta-\alpha)}x+\frac{sen(\omega-\alpha)}{sen(\beta-\alpha)}y$
77	1 " "	di x	di π
83	1 dal basso	$x_3 y_2$	$x_3 y_3$
89	6 dall'alto	di tanto furò quanto	di tanto fuoro quanto

Pag.	Linea	Errata	Corrige
103	8 dal basso	$ax+by=0$	$ax+by+c=0$
115	1 dall'alto	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
116	3 " "	$qx+pq=pq$	$qx+py=pq$
123	11 dal basso	calcolata	calata
124	3 dall'alto	$=\cos^2\beta(2-\cos^2\alpha)+\dots$	$=\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)+\dots$
"	4 " "	$=\cos^2\alpha+\cos\beta-\dots$	$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\dots$
126	5 " "	$aX+by+(ax_1+by_1+c)=0$	$aX+bY+(ax_1+by_1+c)=0$
127	1 " "	$\dfrac{(ax_1+by_1)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{}}$	$\dfrac{(ax_1+by_1+c)\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{}}$
"	7 dal basso	ax_2+by_1+c	ax_1+by_1+c
129	7 " "	$\mathrm{tag}\,\theta=\dfrac{ab'-a'b}{aa'-bb'}$	$\mathrm{tag}\,\theta=\dfrac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$
131	9 " "	$a'b'+bb'-\dots$	$aa'+bb'$.
"	4 " "	$ab'+a'b=0$	$aa'+bb'=0$
135	3 " "	$a:b=\lambda a+\mu a':ab+\mu b'$	$a:b=\lambda a+\mu a':\lambda b+\mu b'$
136	9 " "	$(x_2\, y_1)$	$(x_1\, y_1)$
169	7 " "	formole (VI)	formole (V)
"	5 " "	Sommandole (VI)	Sommandole (V)
173	9 " "	$O(x_1 . y_1 . z_1)$	$O(x_1 . y_1 . z_1)$.
203	10 dall'alto	$z'=z+R\alpha$	$z'=z+k\alpha$

Pag.	Linea	Errata	Corrige
204	2 dall'alto	la 2ª delle (11)	la 2ª delle (12)
218	4 dal basso	$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}$	$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}$
219	1 " "	$D = \dots$	$-D = \dots$
220	1 " "	$D = \dots$	$-D = \dots$
221	5 dall'alto	$D \operatorname{sen} \Omega =$	$-D \operatorname{sen} \Omega =$
"	10 " "	$D \operatorname{sen} \Omega =$	$-D \operatorname{sen} \Omega =$
"	6 dal basso	il segno di Δ	il segno opposto a Δ
229	6 dall'alto	$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{(A^2+B^2+C^2)(C'^2+B'^2+C'^2)}$	$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}$
246	10 " "	$z - z_0 = t \cos \beta$	$z - z_0 = t \cos \gamma$
251	10 " "	$(x_0 + t \cos \alpha \dots$	$(x_0 + \cos \alpha \dots$
255	1 dal basso	$\delta = \frac{\sqrt{\dots + (y_1 - n z_1 + b)^2 + \dots}}{\sqrt{\dots}}$	$\delta = \frac{\sqrt{\dots + (y_1 - n z_1 - b)^2 + \dots}}{\sqrt{\dots}}$
275	5 dall'alto	$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_3 - \lambda} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_3 - \mu}$	$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_1 - \mu}$
"	8 " " fino alla fine della pag.		In tutte le formole sostituire a $\lambda_3 \mu_3$ rispettivamente $\lambda_1 \mu_1$
277	1 dall'alto	Lo stesso accadrebbe con $ad - bc = 0$	Lo stesso accadrebbe se a fosse 0 e $ad - bc = 0$
296	9 " "	$A_2 (A_2 A_3 E P)$	$A_1 (A_2 A_3 E P)$
297	7 " "	idem	idem

Pag	Linea	Errata	Corrige
303	1 dall'alto	$A_1 A_2 \equiv A_3$	$A_1 A_2 = a_3$
304	8 " "	$\mu_1 = a_2 (a_2 a_3 e p)$	$\mu_1 = a_1 (a_2 a_3 e p)$
316	3 dal basso	$\frac{y_1}{y_3} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}$	$\frac{y_1}{y_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}$
318	12 dall'alto	$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 x_3 = 0$	$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0$
319	3 dal basso	(nel titolo del § 84) nuove punteggiate	curve punteggiate
333	10 " "	$\operatorname{sen}\alpha\, x_1 + (\cos\alpha - \varsigma) + b x_3 = 0$	$\operatorname{sen}\alpha\, x_1 + (\cos\alpha - \varsigma) \cdot x_2 + b x_3 = 0$
334	2 dall'alto	$x_1 : x_2 : x_3 = a(1-\cos\alpha) - b \operatorname{sen}\alpha :$ $a \operatorname{sen}\alpha + b(1 - \operatorname{sen}\alpha) : \dots$	$x_1 : x_2 : x_3 = a(1-\cos\alpha) - b \operatorname{sen}\alpha :$ $a \operatorname{sen}\alpha + b(1-\cos\alpha)$
345	5 " "	Da ogni spigolo $A_1 A_2$	Da ogni spigolo $A_i A_k$
365	8 dal basso	Sempre	Anche
368	10 dall'alto	$\dots = a(y_1 - \alpha y_2)(y_2 - \beta y_2)$	$\dots = a(y_1 - \alpha y_2)(y_1 - \beta y_2)$
386	4 dal basso	$f x' x = \dots + (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3) = 0$	$f x' x = \dots + (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3)x_3 = 0$
388	8 " "	$y_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{23}\xi_3$	$y_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3$
"	9 " "	$y_2 = A_{21}\xi_1 + \dots$	$y_2 = A_{12}\xi_1 + \dots$
390	7 dall'alto	$y_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_2$	$y_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1$
"	10 " "	$\xi_1 = \lambda \xi'_1 + \mu \xi''_2$	$\xi_1 = \lambda \xi'_1 + \mu \xi''_1$
407	5 " "	è negativo, reali e distinte se è positivo	è positivo, reali e distinte se è negativo.
"	4 dal basso	cioè $A \neq 0$	cioè $\Delta \neq 0$

Pag.	Linea	Errata	Corrige
408	5 dal basso	piano seguente	piano segante
411	6 " "	$x'_2 = 1$	$x'_3 = 1$
412	8 " "	porre $\lambda = \frac{m}{m+n}$	porre $\lambda = \frac{n}{m+n}$
414	10 " "	$\Delta a_{23} < 0$	$\Delta a_{33} < 0$
"	7 " "	$A \neq 0$	$\Delta \neq 0$
415	9 dall'alto	dimostrando	dimostrate
416	7 dal basso	$f(xy) < 0$	$f(xy) > 0$
430	10 dall'alto	$x = X + a'$	$x = X + x'$
433	10 dal basso	$a'_{12} = a_{11} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cdots\cdots$	$a'_{12} = -a_{11} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cdots\cdots$
441	4 dall'alto	con $A = 0$	con $\Delta = 0$
"	9 " "	$\frac{x^2}{\left(\frac{H}{C_1}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{C_2}\right)} = 1$	$\frac{x^2}{\left(\frac{H}{S_1}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{H}{S_2}\right)} = 1$
443	7 " "	$\frac{H}{C_1}$, negativo $\frac{H}{C_2}$	$\frac{H}{S_1}$, negativo $\frac{H}{S_2}$
448	10 dal basso	A_{33}	A_{23}
454	3 " "	$x^2 + y^2 = \cdots\cdots \geq a^2$	$x^2 + y^2 = \cdots\cdots \leq a^2$
"	2 " "	$x^2 + y^2 = \cdots\cdots \leq b^2$	$x^2 + y^2 = \cdots\cdots \geq b^2$
458	1 dall'alto	$\frac{x_1^2}{a_2} - \frac{y_2^2}{b^2} = x_3^2$	$\frac{x_1^2}{a_2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2$
459	5 " "	$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos'\theta}{a^2} \cdots\cdots$	$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} \cdots\cdots$

Pag	Linea	Errata	Corrige
461	10 dal basso	$\delta = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b}\,(bx'+ay')}$	$\delta = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\,(bx'+ay')}$
466	5 dall'alto (nota)	$m' = \dfrac{y''+y'}{x''-x'}$	$m' = \dfrac{y''+y'}{x''+x'}$
467	3 dall'alto	le diagonali sono diametri coniugati	le linee mediane sono diametri coniugati
"	6 " "	vale per un parallelogrammo circoscritto	vale per le diagonali di un parallelogrammo circoscritto
485	2 dal basso	$(tt')(t'\bar{t}')$	$(t\bar{t}')(t'\bar{t}')$
489	5 dall'alto	$A_{21} = a_{22}\, a_{33} - \ldots\ldots$	$A_{11} = a_{22}\, a_{33} - \ldots\ldots$
499	11 dal basso	che l'ellisse	con l'ellisse
507	ultima	finita	infinita
508	4 dal basso	sul vertice	nel vertice
512	1ª (nota)	quindi	quando

Math 8509.04.3
Lezioni di geometria analitica.
Cabot Science 003348638
3 2044 091 919 415